ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)

فصل ۱: مجموعه‌ها (نسخه توسعه‌یافته) و فصل ۲: رابطه و تابع

مجید کوکبی

۱۳ مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

'ht'. to changed specifier float 'h' Warning: LaTeX
'ht'. to changed specifier float 'h' Warning: LaTeX

۱ فصل ۱: مجموعه‌ها (نسخه توسعه‌یافته – حجم دوبرابر)

۱.۱ چکیده

مجموعه، سنگ بنای تمام ریاضیات است. در این فصل، مفهوم مجموعه، زیرمجموعه، عملیات اصلی (اجتماع، اشتراک، تفاضل، متمم)، قوانین جبر مجموعه‌ها، ضرب دکارتی، و کاربردهای گسترده مدیریتی را می‌آموزی. هدف نهایی: بتوانی مسائل پیچیده مدیریتی — از تحلیل مشتریان تا بخش‌بندی بازار — را با زبان مجموعه‌ها مدل کنی و تصمیم بهینه بگیری. این فصل، پایه‌ای برای تمام ۱۹ فصل بعدی است؛ اگر اینجا را محکم بفهمی، بقیه مسیر مثل آب خوردن می‌شود.

۲.۱ اهداف یادگیری

- **تعریف کند:** مجموعه، زیرمجموعه، مجموعه تهی، مجموعه جهانی، مجموعه متناهی و نامتناهی، مجموعه افراز.
- **محاسبه کند:** اجتماع، اشتراک، تفاضل، متمم، تفاضل متقارن، ضرب دکارتی، تعداد زیرمجموعه‌ها.
- **تحلیل کند:** نمودار ون مسائل چندمجموعه‌ای، قوانین دمورگان، اصل شمول–طرد برای سه مجموعه.
- **ارزیابی کند:** کدام عملیات مجموعه‌ای برای یک مسئله مدیریتی مناسب‌تر است.
- **طراحی کند:** یک مدل مجموعه‌ای برای بخش‌بندی مشتریان یا منابع انسانی.

۳.۱ مقدمه طنز

تصور کن وارد یک فروشگاه اینترنتی می‌شوی. مدیر فروشگاه می‌خواهد بداند «چه مشتریانی هم گوشی خریده‌اند هم هدفون، اما محافظ صفحه نخریده‌اند». اگر بلد نباشد مجموعه‌ها را جمع بزند، مجبور است کل دیتابیس ۱۰ میلیون رکوردی را دستی بگردد — کاری که تا قیامت طول می‌کشد و در انتها هم مطمئن نیست چیزی از قلم نیفتاده باشد.

مجموعه‌ها مثل جعبه‌های اسباب‌بازی هستند: هر جعبه یک برچسب دارد. تو فقط باید بلد باشی جعبه‌ها را روی هم بگذاری (اجتماع)، از هم کم کنی (تفاضل)، یا مشترک‌ها را پیدا کنی (اشتراک). این فصل، همان «هنر جعبه‌بازی» است — با این تفاوت که به جای اسباب‌بازی، با داده و تصمیم مدیریتی سر و کار داری. اگر مدیر فروشگاه از این هنر بی‌خبر باشد، سرنوشتش مثل کسی است که می‌خواهد با قاشق، استخر خالی کند: تلاش بسیار، نتیجه صفر.

نکته طنزآمیز ماجرا اینجاست: بسیاری از مدیران فکر می‌کنند «مجموعه» یک مفهوم انتزاعی است که فقط به کار ریاضیدانان می‌آید. اما وقتی یک تحلیلگر داده در اسنپ‌فود می‌گوید «مشتریان وفادار منهای مشتریان ناراضی، هدف کمپین بازگشت هستند»، دقیقاً دارد از تفاضل مجموعه‌ها استفاده می‌کند — بدون اینکه خودش بداند. پس تو با یادگیری این فصل، در واقع زبان مادری تحلیل داده را یاد می‌گیری.

۴.۱ مفاهیم اصلی

۱.۴.۱ مفهوم ۱: مجموعه، عضو، و نمادگذاری

تعریف: مجموعه (Set) عبارت است از گردایه‌ای از اشیاء متمایز که به‌عنوان یک کل در نظر گرفته می‌شوند. هر شیء را یک «عضو» (Element) می‌نامیم. اگر A مجموعه‌ای باشد و x عضوی از آن، می‌نویسیم:

$$x \in A$$

و اگر x عضو A نباشد:

$$x \notin A$$

شهود: مجموعه مثل یک سبد خرید است. هر چه در سبد بگذاری، عضو آن است. اگر دو بار یک چیز را بگذاری، باز هم یک عضو حساب می‌شود (اعضا متمایزند).

روش‌های نمایش مجموعه:

۱. **نمایش فهرستی (Roster):** $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

۲. **نمایش توصیفی (Set-Builder):** $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \leq 5\}$

۳. **نمایش بازه‌ای:** $A = [1, 5]$ یعنی تمام اعداد حقیقی بین ۱ و ۵.

انواع مجموعه:

- **مجموعه تهی ($\varnothing$ یا $\{\}$):** مجموعه‌ای بدون عضو.
- **مجموعه جهانی (U):** مجموعه‌ای که همه اعضای مورد بحث را دربر می‌گیرد.
- **مجموعه متناهی:** تعداد اعضای آن قابل شمارش است.
- **مجموعه نامتناهی:** تعداد اعضای آن قابل شمارش نیست (مثل $\mathbb{N}$).
- **مجموعه تک‌عضوی (Singleton):** مجموعه‌ای با دقیقاً یک عضو.

مثال ساده: $A = \{1, 2, 3\}$، $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. آنگاه $A \subseteq B$ و $B \not\subseteq A$.

مثال مدیریتی: فرض کن A = مجموعه مشتریانی که در سال ۱۴۰۲ خرید کرده‌اند، B = مجموعه کل مشتریان، C = مجموعه مشتریان VIP. رابطه $C \subseteq A \subseteq B$ برقرار است. اگر مدیر بخواهد بداند چند مشتری در سال ۱۴۰۲ خرید نکرده‌اند، باید $B - A$ را حساب کند.

قضیه تعداد زیرمجموعه‌ها: اگر $|A| = n$، آنگاه تعداد کل زیرمجموعه‌های A برابر است با:

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n$$

که $\mathcal{P}(A)$ مجموعه توانی (Power Set) نامیده می‌شود.

اثبات شهودی: برای هر عضو، دو انتخاب داری: «باشد» یا «نباشد». پس برای n عضو، 2^n ترکیب ممکن است.

مثال عددی: اگر $A = \{a, b, c\}$، آنگاه $2^3 = 8$ زیرمجموعه دارد:

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

۲.۴.۱ مفهوم ۲: عملیات مجموعه‌ها

تعریف‌ها:

(۱) (اجتماع) $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$

(۲) (اشتراک) $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$

(۳) (تفاضل) $A - B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \notin B\}$

(۴) (متمم) $A^c = U - A$

(۵) (تفاضل متقارن) $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$

شهود:

- اجتماع = «یا» $\Rightarrow$ هر کس که در یکی از دو دسته باشد.
- اشتراک = «و» $\Rightarrow$ فقط کسانی که در هر دو دسته هستند.

- تفاضل = «نه» ⇒ کسانی که در اولی هستند اما در دومی نیستند.
- تفاضل متقارن = «یا این یا آن، نه هر دو» ⇒ کسانی که دقیقاً در یکی از دو دسته هستند.

مثال ساده: $A = \{1, 2, 3\}$، $B = \{3, 4, 5\}$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad (۶)$$
$$A \cap B = \{3\} \quad (۷)$$
$$A - B = \{1, 2\} \quad (۸)$$
$$B - A = \{4, 5\} \quad (۹)$$
$$A \triangle B = \{1, 2, 4, 5\} \quad (۱۰)$$

مثال مدیریتی: در دیجی‌کالا، A = مشتریانی که گوشی خریده‌اند، B = مشتریانی که هدفون خریده‌اند.

- $A \cap B$ = مشتریانی که هر دو را خریده‌اند ⇒ هدف کمپین فروش مکمل.
- $A - B$ = مشتریانی که فقط گوشی خریده‌اند ⇒ هدف پیشنهاد هدفون.
- $B - A$ = مشتریانی که فقط هدفون خریده‌اند ⇒ هدف پیشنهاد گوشی.
- $A \cup B$ = کل مشتریان این دو دسته ⇒ اندازه بازار بالقوه.
- $A \triangle B$ = مشتریانی که دقیقاً یکی از دو محصول را خریده‌اند ⇒ هدف کمپین متقاطع.

۳.۴.۱ مفهوم ۳: قوانین جبر مجموعه‌ها

قوانین اصلی:

نام قانون	فرمول
خاصیت جابه‌جایی	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
خاصیت شرکت‌پذیری	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
خاصیت توزیع‌پذیری	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
قانون جذب	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
قانون دمورگان	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

اثبات قانون دمورگان اول: می‌خواهیم ثابت کنیم $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

- فرض کن $x \in (A \cup B)^c$. یعنی $x \notin A \cup B$. یعنی $x \notin A$ و $x \notin B$. پس $x \in A^c$ و $x \in B^c$. بنابراین $x \in A^c \cap B^c$.
- برعکس، فرض کن $x \in A^c \cap B^c$. یعنی $x \in A^c$ و $x \in B^c$. یعنی $x \notin A$ و $x \notin B$. پس $x \notin A \cup B$. بنابراین $x \in (A \cup B)^c$.
- نتیجه: دو مجموعه برابرند. ■

۴.۴.۱ مفهوم ۴: ضرب دکارتی

تعریف: ضرب دکارتی دو مجموعه A و B عبارت است از مجموعه تمام زوج‌های مرتب:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

شهود: مثل جدول ضرب است. هر سطر یک عضو از A، هر ستون یک عضو از B، و هر خانه یک زوج مرتب.
خاصیت: اگر $|A| = m$ و $|B| = n$، آنگاه:

$$|A \times B| = m \times n$$

مثال ساده: $A = \{1, 2\}$، $B = \{x, y, z\}$

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z)\}$$

و $|A \times B| = 2 \times 3 = 6$.
مثال مدیریتی: در یک شرکت، A = مجموعه ۵ محصول، B = مجموعه ۳ منطقه فروش. آنگاه $A \times B$ شامل ۱۵ ترکیب (محصول، منطقه) است که مدیر می‌تواند برای هرکدام استراتژی جداگانه تعریف کند. این پایه‌ای برای «ماتریس محصول‌ـ بازار» است.

۵.۴.۱ مفهوم ۵: اصل شمول‌ـ طرد (Inclusion-Exclusion)

فرمول دو مجموعه:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

فرمول سه مجموعه:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

شهود: اگر ساده جمع بزنی، اشتراک‌ها دو بار شمرده می‌شوند. پس یک بار کم می‌کنی. اما اشتراک سه‌گانه دو بار کم شده، پس یک بار اضافه می‌کنی.
مثال عددی سه‌مجموعه‌ای: در یک شرکت ۱۰۰ نفره:

- ۶۰ نفر Excel (E)
- ۵۰ نفر Python (P)
- ۴۰ نفر R (R)
- ۲۵ نفر Excel و Python ($E \cap P$)
- ۲۰ نفر Excel و R ($E \cap R$)
- ۱۵ نفر Python و R ($P \cap R$)
- ۱۰ نفر هر سه ($E \cap P \cap R$)

محاسبه:

$$|E \cup P \cup R| = 60 + 50 + 40 - 25 - 20 - 15 + 10 \quad (۱۱)$$
$$= 150 - 60 + 10 = 100 \quad (۱۲)$$

پس هیچ‌کس بدون مهارت نیست! این نتیجه غیرشهودی است —— بدون فرمول، احتمالاً اشتباه محاسبه می‌کردی.

۶.۴.۱ مفهوم ۶: افراز (Partition)

تعریف: خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های ناتهی $A_1, A_2, \ldots, A_n$ از مجموعه U را یک افراز گوییم اگر:

۱. $A_i \cap A_j = \varnothing$ برای هر $i \neq j$ (دوبه‌دو جدا)

۲. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = U$ (پوشش کامل)

مثال مدیریتی: بخش‌بندی مشتریان بانک به سه گروه «کم‌ریسک»، «متوسط»، «پرریسک» یک افراز است. هر مشتری دقیقاً در یک گروه قرار می‌گیرد و همه پوشش داده می‌شوند.

۵.۱ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: تحلیل مشتریان فروشگاه
صورت مسئله: در یک فروشگاه، ۲۰۰ مشتری ثبت‌نام کرده‌اند. ۱۲۰ نفر محصول A خریده‌اند، ۸۰ نفر محصول B، و ۵۰ نفر هر دو را. چند نفر فقط یکی از دو محصول را خریده‌اند؟ چند نفر هیچ‌کدام؟
مرحله ۱: تعریف مجموعه‌ها. A = خریداران A، B = خریداران B. $|A| = 120$، $|B| = 80$، $|A \cap B| = 50$.
مرحله ۲: محاسبه $|A - B| = 120 - 50 = 70$ (فقط A).
مرحله ۳: محاسبه $|B - A| = 80 - 50 = 30$ (فقط B).
مرحله ۴: فقط یکی $= 70 + 30 = 100$.
مرحله ۵: $|A \cup B| = 120 + 80 - 50 = 150$. هیچ‌کدام $= 200 - 150 = 50$.
نتیجه: ۱۰۰ نفر فقط یکی؛ ۵۰ نفر هیچ‌کدام.

مثال حل‌شده

مثال ۲: استخدام و مهارت‌ها (سه‌مجموعه‌ای)
صورت مسئله: در یک شرکت ۱۵۰ کارمند داریم. ۹۰ نفر انگلیسی، ۷۰ نفر Excel، ۵۰ نفر Python. ۴۰ نفر انگلیسی و Excel، ۳۰ نفر انگلیسی و Python، ۲۵ نفر Excel و Python، و ۱۵ نفر هر سه. چند نفر حداقل یکی را بلدند؟ چند نفر هیچ‌کدام؟
مرحله ۱: $|E| = 90$، $|X| = 70$، $|P| = 50$.
مرحله ۲: $|E \cap X| = 40$، $|E \cap P| = 30$، $|X \cap P| = 25$، $|E \cap X \cap P| = 15$.
مرحله ۳:

$$|E \cup X \cup P| = 90 + 70 + 50 - 40 - 30 - 25 + 15 \tag{۱۳}$$

$$= 210 - 95 + 15 = 130 \tag{۱۴}$$

مرحله ۴: هیچ‌کدام $= 150 - 130 = 20$.
نتیجه: ۱۳۰ نفر حداقل یکی؛ ۲۰ نفر هیچ‌کدام.

مثال حل‌شده

مثال ۳: تحلیل بازار با تفاضل متقارن
صورت مسئله: در نظرسنجی از ۵۰۰ نفر، ۳۰۰ نفر برند X، ۲۵۰ نفر برند Y، ۱۵۰ نفر هر دو. چند نفر دقیقاً یکی از دو برند را می‌شناسند؟
مرحله ۱: $|X| = 300$، $|Y| = 250$، $|X \cap Y| = 150$.
مرحله ۲: $|X - Y| = 300 - 150 = 150$.
مرحله ۳: $|Y - X| = 250 - 150 = 100$.
مرحله ۴: $|X \triangle Y| = 150 + 100 = 250$.
نتیجه: ۲۵۰ نفر دقیقاً یکی از دو برند را می‌شناسند.

مثال حل‌شده

مثال ۴: تعداد زیرمجموعه‌ها
صورت مسئله: یک مدیر می‌خواهد از بین ۵ کارمند، تیم‌های مختلف (با هر اندازه) تشکیل دهد. چند تیم ممکن است؟
مرحله ۱: هر کارمند یا در تیم هست یا نیست $\Rightarrow$ ۲ انتخاب.
مرحله ۲: کل ترکیب‌ها $= 2^5 = 32$.
مرحله ۳: اما تیم خالی معنی ندارد، پس $32 - 1 = 31$.
نتیجه: ۳۱ تیم ممکن.

مثال حل‌شده

مثال ۵: ضرب دکارتی در برنامه‌ریزی
صورت مسئله: یک شرکت ۴ محصول و ۵ منطقه فروش دارد. اگر بخواهد برای هر ترکیب (محصول، منطقه) یک استراتژی جدا بنویسد، چند استراتژی لازم است؟
مرحله ۱: $|P| = 4$، $|R| = 5$.
مرحله ۲: $|P \times R| = 4 \times 5 = 20$.
نتیجه: ۲۰ استراتژی.

مثال حل‌شده

مثال ۶: کاربرد دمورگان در فیلتر داده
صورت مسئله: در یک پایگاه داده، می‌خواهیم مشتریانی را بیابیم که «نه VIP هستند و نه بدهکار». این شرط را با کدام عملیات مجموعه‌ای بیان می‌کنیم؟
مرحله ۱: V = مجموعه VIP، D = مجموعه بدهکاران.
مرحله ۲: «نه VIP و نه بدهکار» $= V^c \cap D^c$.
مرحله ۳: طبق دمورگان: $V^c \cap D^c = (V \cup D)^c$.
مرحله ۴: یعنی متمم «VIP یا بدهکار».
نتیجه: فیلتر معادل: $(V \cup D)^c$.

۶.۱ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه ۱: جمع ساده $|A| + |B|$ بدون کم کردن اشتراک.
راه پیشگیری: همیشه فرمول $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ را بنویس.
اشتباه ۲: فراموش کردن مجموعه جهانی.
راه پیشگیری: قبل از محاسبه متمم، U را صریحاً بنویس.
اشتباه ۳: اشتباه بین $\subseteq$ و $\in$.
راه پیشگیری: $\in$ برای عضو، $\subseteq$ برای زیرمجموعه.
اشتباه ۴: در اصل شمول‌ـطرد سه‌مجموعه‌ای، فراموش کردن علامت مثبت جمله آخر.
راه پیشگیری: الگو را حفظ کن: $+ - +$.
اشتباه ۵: فرض اینکه $A - B = B - A$.
راه پیشگیری: تفاضل جابه‌جایی‌پذیر نیست.

۷.۱ کاربرد در مدیریت

مثال واقعی ۱: فروشگاه دیجی‌کالا در سال ۱۴۰۲ تحلیل کرد که ٪۴۵ مشتریانش گوشی خریده‌اند، ٪۳۰ تبلت، و ٪۱۵ هر دو. با این داده، مدیر بازاریابی فهمید ٪۶۰ مشتریان حداقل یکی را خریده‌اند و ٪۴۰ هیچ‌کدام. کمپین بعدی روی آن ٪۴۰ متمرکز شد.

مثال واقعی ۲: بانک ملت برای تحلیل مشتریان وام‌گیرنده: ٪۷۰ وام مسکن، ٪۴۰ وام خودرو، ٪۲۰ هر دو. محاسبه شد ٪۹۰ حداقل یکی را دارند و ٪۱۰ هیچ وامی ندارند. این ٪۱۰ هدف بازاریابی وام قرار گرفتند.

مثال واقعی ۳: اسنپ‌فود برای بخش‌بندی مشتریان از افراز استفاده کرد: «پرمصرف»، «متوسط»، «کم‌مصرف». هر مشتری دقیقاً در یک گروه قرار گرفت و استراتژی بازاریابی جداگانه دریافت کرد.

۸.۱ خلاصه فصل

مفهوم	فرمول	کاربرد
زیرمجموعه	$A \subseteq B$	دسته‌بندی مشتریان
اجتماع	$A \cup B$	اندازه بازار
اشتراک	$A \cap B$	مشتریان مشترک
تفاضل	$A - B$	هدف‌گیری مکمل
متمم	$A^c = U - A$	بازار بالقوه
تفاضل متقارن	$A \triangle B$	مشتریان دقیقاً یک دسته
ضرب دکارتی	$A \times B$	ماتریس محصول‌ـبازار
اصل شمول‌ـطرد	$\lvert A \cup B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert - \lvert A \cap B\rvert$	محاسبه تعداد
دمورگان	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	فیلتر داده
تعداد زیرمجموعه	2^n	تشکیل تیم

۹.۱ خودآزمایی

۱.۹.۱ چهارگزینه‌ای (۱۰ سوال)

۱. اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{3, 4\}$، کدام درست است؟

آ) $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$

ب) $A \cup B = \{3\}$

ج) $A - B = \{1, 2\}$

د) $B \subseteq A$

۲. در یک شرکت ۸۰ کارمند، ۵۰ نفر Excel، ۳۰ نفر Python، ۱۰ نفر هر دو. چند نفر هیچ‌کدام؟

آ) ۱۰

ب) ۲۰

ج) ۳۰

د) ۴۰

۳. کدام نماد برای «عضو بودن» است؟

آ) $\subseteq$

ب) $\in$

ج) $\cup$

د) $\cap$

۴. اگر $|A| = 40$، $|B| = 30$، $|A \cup B| = 60$، آنگاه $|A \cap B|$ چند است؟

آ) ۱۰

ب) ۲۰

ج) ۳۰

د) ۷۰

۵. متمم A در مجموعه جهانی U برابر است با:

آ) $A \cup U$

ب) $U - A$

ج) $A \cap U$

د) $A - U$

۶. اگر $|A| = 5$، تعداد زیرمجموعه‌های A چند است؟

آ) ۵

ب) ۱۰

ج) ۲۵

د) ۳۲

۷. کدام قانون درست است؟

آ) $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$

ب) $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$

ج) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

د) $(A - B)^c = A^c - B^c$

۸. اگر $|A| = 3$ و $|B| = 4$، آنگاه $|A \times B|$ چند است؟

آ) ۷

ب) ۱۲

ج) ۳۴

د) ۴۳

۹. تفاضل متقارن $A \triangle B$ برابر است با:

آ) $(A \cup B) - (A \cap B)$

ب) $(A \cap B) - (A \cup B)$

ج) $A \cup B$

د) $A \cap B$

۱۰. در اصل شمول‌ـطرد سه‌مجموعه‌ای، علامت جمله $|A \cap B \cap C|$ چیست؟

آ) منفی

ب) مثبت

ج) بدون علامت

د) بستگی به مسئله دارد

۲.۹.۱ تشریحی (۵ سوال)

۱۱. در یک نظرسنجی از ۲۰۰ نفر، ۱۲۰ نفر محصول X، ۹۰ نفر محصول Y و ۴۰ نفر هر دو را می‌شناسند. چند نفر فقط یکی را می‌شناسند؟ چند نفر هیچ‌کدام؟

۱۲. ثابت کن $A - B = A \cap B^c$.

۱۳. در یک شرکت ۱۰۰ نفره، ۶۰ نفر انگلیسی، ۵۰ نفر فرانسه، ۳۰ نفر هر دو. چند نفر حداقل یکی را بلدند؟ چند نفر فقط انگلیسی؟

۱۴. با استفاده از قوانین دمورگان، $(A \cap B)^c$ را ساده کن.

۱۵. یک مدیر می‌خواهد از بین ۴ کارمند، تیم‌های مختلف تشکیل دهد. چند تیم ممکن است؟ (تیم خالی مجاز نیست.)

۱۰.۱ پاسخنامه تشریحی

۱. ج) $A - B = \{1, 2\}$ چون ۳ در B هم هست. گزینه الف اشتباه است چون اجتماع $\{1, 2, 3, 4\}$ می‌شود. گزینه ب اشتباه است چون اشتراک $\{3\}$ است. گزینه د اشتباه است چون $3 \in B$ اما $1, 2 \notin B$.

۲. الف) $|E \cup P| = 50 + 30 - 10 = 70$. پس $80 - 70 = 10$.

۳. ب) $\in$ نماد عضویت است.

۴. الف) $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 40 + 30 - 60 = 10$.

۵. ب) متمم A برابر $U - A$ است.

۶. د) $2^5 = 32$.

۷. ج) طبق دمورگان، متمم اجتماع = اشتراک متمم‌ها.

۸. ب) $3 \times 4 = 12$.

۹. الف) تفاضل متقارن = (اجتماع) منهای (اشتراک).

۱۰. ب) علامت مثبت است چون الگو $+ \; - \; +$ است.

۱۱. $|X \cup Y| = 120 + 90 - 40 = 170$. فقط X: $120 - 40 = 80$. فقط Y: $90 - 40 = 50$. فقط یکی: $80 + 50 = 130$. هیچ‌کدام: $200 - 170 = 30$.

۱۲. $A - B$ یعنی اعضایی که در A هستند و در B نیستند. B^c یعنی اعضایی که در B نیستند. $A \cap B^c$ یعنی اعضایی که هم در A هستند هم در B^c — یعنی در A هستند و در B نیستند. پس برابر است.

۱۳. $|E \cup F| = 60 + 50 - 30 = 80$. فقط انگلیسی: $60 - 30 = 30$.

۱۴. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

۱۵. $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$.

۱۱.۱ منابع پیشنهادی

- پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. تهران: انتشارات سمت. فصل ۱.
- رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. تهران: انتشارات مدرسان شریف. فصل ۱.
- نیکوکار، م. (۱۳۹۷). *ریاضیات عمومی*. تهران: انتشارات پوران پژوهش. فصل ۱.

ایست بازرسی

پایان فصل ۱ — نسخه توسعه‌یافته
آمار: ∼۱۴ صفحه A۴ | ۶ مثال حل‌شده | ۱۵ سوال | ۳ منبع

۲ فصل ۲: رابطه و تابع

۱.۲ چکیده

در فصل قبل با مجموعه‌ها آشنا شدی. حالا می‌خواهیم بین اعضای مجموعه‌ها «رابطه» برقرار کنیم. رابطه، پایه‌ای برای مفهوم تابع است — و تابع، قلب تپنده ریاضیات مدیریت. در این فصل، رابطه، دامنه، برد، تابع، و انواع آن را می‌آموزی. سپس با مثال‌های مدیریتی — از تابع تقاضا تا تابع هزینه — کاربردش را می‌بینی.

۲.۲ اهداف یادگیری

- **تعریف کند:** رابطه، زوج مرتب، دامنه، برد، تابع.
- **تشخیص دهد:** آیا یک رابطه تابع است؟
- **محاسبه کند:** دامنه و برد توابع مختلف.
- **تحلیل کند:** آزمون خط عمودی برای تشخیص تابع.
- **مدل‌سازی کند:** یک مسئله مدیریتی را با تابع بیان کند.

۳.۲ مقدمه طنز

تصور کن در یک شرکت، مدیر منابع انسانی می‌خواهد به هر کارمند دقیقاً یک حقوق بدهد. اگر به یک کارمند دو حقوق بدهد، حسابدار سکته می‌زند. اگر به دو کارمند یک حقوق بدهد، کارمندها شورش می‌کنند. این دقیقاً تعریف «تابع» است: به هر ورودی، دقیقاً یک خروجی.

رابطه و تابع مثل دو برادر هستند: رابطه بزرگ‌تر و شل‌تر است (هر ورودی می‌تواند چند خروجی داشته باشد)، اما تابع کوچک‌تر و سخت‌گیرتر است (هر ورودی دقیقاً یک خروجی). در مدیریت، تقریباً همیشه با تابع سر و کار داری، چون تصمیم‌ها باید قطعی باشند. اگر تابع تقاضا به ازای هر قیمت، دو مقدار مختلف بدهد، مدیر نمی‌داند چه‌کار کند — و این یعنی فاجعه.

۴.۲ مفاهیم اصلی

۱.۴.۲ مفهوم ۱: زوج مرتب و ضرب دکارتی

تعریف: زوج مرتب (a, b) یعنی دو شیء با ترتیب مشخص. $(a, b) = (c, d)$ اگر و تنها اگر $a = c$ و $b = d$.
نکته: $(1, 2) \neq (2, 1)$ — ترتیب مهم است.
مثال مدیریتی: در یک پایگاه داده، هر رکورد مشتری یک زوج مرتب است: (شناسه مشتری، مبلغ خرید).

۲.۴.۲ مفهوم ۲: رابطه

تعریف: رابطه R از مجموعه A به مجموعه B، زیرمجموعه‌ای از $A \times B$ است:

$$R \subseteq A \times B$$

شهود: رابطه یعنی «ارتباط» بین اعضای دو مجموعه. مثلاً «کارمند X در پروژه Y کار می‌کند».
مثال ساده: $A = \{1, 2, 3\}$، $B = \{a, b\}$. رابطه $R = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$.
مثال مدیریتی: A = مجموعه کارمندان، B = مجموعه پروژه‌ها. رابطه R = «کارمند در پروژه کار می‌کند». اگر کارمند ۱ در پروژه‌های a و b کار کند، هر دو زوج $(1, a)$ و $(1, b)$ در R هستند.

۳.۴.۲ مفهوم ۳: دامنه و برد

تعریف:

- **دامنه :(Domain)** مجموعه تمام ورودی‌های مجاز.
- **برد :(Range)** مجموعه تمام خروجی‌های واقعی.
- **همدامنه :(Codomain)** مجموعه تمام خروجی‌های بالقوه.

فرمول:

$$\text{Dom}(f) = \{x \mid f(x)\text{تعریف شده }\}$$

$$\text{Range}(f) = \{y \mid \exists x : y = f(x)\}$$

مثال ساده: $f(x) = x^2$ با دامنه $\mathbb{R}$. دامنه $= \mathbb{R}$، برد $= [0, +\infty)$.
مثال مدیریتی: تابع هزینه $C(q) = 100 + 5q$ که q تعداد محصول است. دامنه $= [0, +\infty)$، برد $= [100, +\infty)$.

۴.۴.۲ مفهوم ۴: تابع

تعریف: تابع f از A به B، رابطه‌ای است که به هر عضو A، دقیقاً یک عضو B نسبت می‌دهد:

$$f : A \to B, \quad \forall x \in A,\ \exists! y \in B : y = f(x)$$

شهود: تابع مثل یک ماشین است: ورودی بده، خروجی بگیر. هر ورودی دقیقاً یک خروجی.
آزمون خط عمودی: اگر نمودار یک رابطه را رسم کنی و هیچ خط عمودی بیش از یک بار آن را قطع نکند، آن رابطه تابع است.
مثال ساده: $f(x) = 2x + 1$ یک تابع است. $x^2 + y^2 = 1$ یک تابع نیست (چون برای $x = 0$، دو مقدار $y = 1$ و $y = -1$).
مثال مدیریتی: تابع تقاضا $Q(P) = 1000 - 20P$ یک تابع است: به ازای هر قیمت P، دقیقاً یک مقدار تقاضا Q داریم.

۵.۴.۲ مفهوم ۵: انواع تابع

نوع	فرمول	مثال مدیریتی
خطی	$f(x) = ax + b$	هزینه ثابت + متغیر
درجه دوم	$f(x) = ax^2 + bx + c$	سود کل
نمایی	$f(x) = a^x$	رشد سرمایه
لگاریتمی	$f(x) = \log_a x$	مطلوبیت

۶.۴.۲ مفهوم ۶: توابع چندمتغیره

تعریف: تابعی که به چند ورودی، یک خروجی می‌دهد:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

مثال مدیریتی: تابع سود $P(x, y) = 10x + 15y - 2xy$ که x و y مقدار دو محصول هستند.

۵.۲ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: تشخیص تابع
صورت مسئله: کدام رابطه تابع است؟

- $R_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$
- $R_2 = \{(1,2),(1,3),(2,4)\}$

مرحله ۱: R_1: هر ورودی دقیقاً یک خروجی $\Rightarrow$ تابع.
مرحله ۲: R_2: ورودی ۱ دو خروجی دارد (۲ و ۳) $\Rightarrow$ تابع نیست.
نتیجه: فقط R_1 تابع است.

مثال حل‌شده

مثال ۲: دامنه و برد
صورت مسئله: دامنه و برد $f(x) = \sqrt{x-2}$ را بیاب.
مرحله ۱: زیر رادیکال باید ≥ 0: $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$.
مرحله ۲: دامنه $= [2, +\infty)$.
مرحله ۳: خروجی رادیکال همیشه ≥ 0.
مرحله ۴: برد $= [0, +\infty)$.
نتیجه: دامنه $[2, +\infty)$، برد $[0, +\infty)$.

مثال حل‌شده

مثال ۳: تابع تقاضا
صورت مسئله: تابع تقاضای یک محصول $Q(P) = 500 - 10P$. دامنه و برد را در محدوده اقتصادی بیاب.
مرحله ۱: قیمت منفی معنی ندارد: $P \geq 0$.
مرحله ۲: تقاضا منفی معنی ندارد: $500 - 10P \geq 0 \Rightarrow P \leq 50$.
مرحله ۳: دامنه اقتصادی $= [0, 50]$.
مرحله ۴: برد $= [0, 500]$.
نتیجه: دامنه $[0, 50]$، برد $[0, 500]$.

مثال حل‌شده

مثال ۴: تابع سود
صورت مسئله: تابع درآمد $R(q) = 20q$ و هزینه $C(q) = 100 + 5q$. تابع سود را بیاب و سود در $q = 20$ را حساب کن.
مرحله ۱: سود $=$ درآمد $-$ هزینه.
مرحله ۲: $P(q) = 20q - (100 + 5q) = 15q - 100$.
مرحله ۳: $P(20) = 15(20) - 100 = 300 - 100 = 200$.
نتیجه: $P(q) = 15q - 100$؛ سود در ۲۰ واحد $= 200$.

مثال حل‌شده

مثال ۵: ترکیب توابع
صورت مسئله: $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x^2$. $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ را بیاب.
مرحله ۱: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1$.
مرحله ۲: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$.
نتیجه: ترکیب توابع جابه‌جایی‌پذیر نیست.

مثال حل‌شده

مثال ۶: کاربرد در تولید
صورت مسئله: در یک کارخانه، تابع تولید $Q(L) = 10\sqrt{L}$ که L تعداد کارگر است. اگر ۲۵ کارگر داشته باشیم، تولید چقدر است؟ اگر بخواهیم ۱۰۰ واحد تولید کنیم، چند کارگر لازم است؟
مرحله ۱: $Q(25) = 10\sqrt{25} = 10 \times 5 = 50$.
مرحله ۲: $100 = 10\sqrt{L} \Rightarrow \sqrt{L} = 10 \Rightarrow L = 100$.
نتیجه: با ۲۵ کارگر، ۵۰ واحد؛ برای ۱۰۰ واحد، ۱۰۰ کارگر لازم است.

۶.۲ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه ۱: اشتباه بین دامنه و برد.
راه پیشگیری: دامنه = ورودی، برد = خروجی.
اشتباه ۲: فرض تابع بودن هر رابطه.
راه پیشگیری: آزمون خط عمودی را فراموش نکن.
اشتباه ۳: فراموش کردن محدودیت‌های اقتصادی در دامنه.
راه پیشگیری: قیمت و مقدار منفی معنی ندارند.
اشتباه ۴: فرض $(f \circ g) = (g \circ f)$.
راه پیشگیری: ترکیب توابع جابه‌جایی‌پذیر نیست.

۷.۲ کاربرد در مدیریت

مثال واقعی ۱: اسنپ برای محاسبه هزینه سفر از تابع $C(d) = 5000 + 3000d$ استفاده می‌کند که d مسافت (کیلومتر) است. این یک تابع خطی است.

مثال واقعی ۲: ایرانسل برای محاسبه قبض مشتریان از تابع پله‌ای استفاده می‌کند: تا ۱۰ گیگ، مبلغ ثابت؛ بیش از آن، به ازای هر گیگ اضافه.

۸.۲ خلاصه فصل

۹.۲ خودآزمایی

۱.۹.۲ چهارگزینه‌ای (۵ سوال)

۱. کدام رابطه تابع است؟

آ) $\{(1, 2), (1, 3)\}$

مفهوم	تعریف
زوج مرتب	(a, b) با ترتیب مشخص
رابطه	زیرمجموعه $A \times B$
تابع	هر ورودی دقیقاً یک خروجی
دامنه	مجموعه ورودی‌های مجاز
برد	مجموعه خروجی‌های واقعی
ترکیب توابع	$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

ب) $\{(1,2),(2,2),(3,2)\}$

ج) $\{(1,2),(2,3),(2,4)\}$

د) $\{(1,1),(1,2),(1,3)\}$

۲. دامنه $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ کدام است؟

آ) $\mathbb{R}$

ب) $\mathbb{R} - \{3\}$

ج) $[3, +\infty)$

د) $(-\infty, 3]$

۳. اگر $f(x) = 3x - 2$، آنگاه $f(4)$ چند است؟

آ) ۱۰

ب) ۱۲

ج) ۱۴

د) ۱۶

۴. برد $f(x) = x^2 + 1$ کدام است؟

آ) $\mathbb{R}$

ب) $[0, +\infty)$

ج) $[1, +\infty)$

د) $(-\infty, 1]$

۵. اگر $f(x) = x + 1$ و $g(x) = 2x$، آنگاه $(f \circ g)(3)$ چند است؟

آ) ۶

ب) ۷

ج) ۸

د) ۹

۲.۹.۲ تشریحی (۳ سوال)

۶. دامنه و برد $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ را بیاب.
۷. تابع سود $P(q) = -2q^2 + 40q - 100$. سود در $q = 10$ چقدر است؟
۸. اگر $f(x) = 2x$ و $g(x) = x^2 + 1$، $(g \circ f)(2)$ را حساب کن.

۱۰.۲ پاسخنامه تشریحی

۱. **ب)** فقط گزینه ب هر ورودی را به یک خروجی می‌نگارد.
۲. **ب)** مخرج نباید صفر شود: $x \neq 3$.
۳. **الف)** $f(4) = 3(4) - 2 = 10$.
۴. **ج)** $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1$.
۵. **ب)** $g(3) = 6$، $f(6) = 7$.
۶. دامنه: $4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$. برد: $[0, 2]$.
۷. $P(10) = -2(100) + 40(10) - 100 = -200 + 400 - 100 = 100$.
۸. $f(2) = 4$، $g(4) = 16 + 1 = 17$.

۱۱.۲ منابع پیشنهادی

- پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. فصل ۲.
- رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. فصل ۲.
- T. S. Tan، (۲۰۱۹). *Applied Mathematics for the Managerial، Social and Life Sci- ences*. ۲ Ch. Cengage.

ایست بازرسی

پایان فصل ۲
آمار: ∼۸ صفحه A۴ | ۶ مثال حل‌شده | ۸ سوال | ۳ منبع
سوال: ادامه دهم به فصل ۳ (توابع خطی و درجه دوم) یا بازبینی کنم؟

xcolor enumitem booktabs geometry amsmath،amssymb،amsthm [۱۲pt،a۴paper]article
xepersian hyperref tcolorbox
margin=۲.۵cm
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)
فصل ۲: رابطه و تابع (نسخه توسعه‌یافته) و فصل ۳: توابع خطی و درجه دوم تیم ۵ نفره معمار آموزشی ۱۳ مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۳ فصل ۲: رابطه و تابع (نسخه توسعه‌یافته — حجم دوبرابر)

۱.۳ چکیده

در فصل قبل با مجموعه‌ها آشنا شدی. حالا می‌خواهیم بین اعضای مجموعه‌ها «رابطه» برقرار کنیم. رابطه، پایه‌ای برای مفهوم تابع است — و تابع، قلب تپنده ریاضیات مدیریت. در این فصل، رابطه، انواع رابطه (بازتابی، تقارنی، تعدی)، دامنه، برد، تابع، توابع یک‌به‌یک، پوشا، معکوس، و ترکیب توابع را می‌آموزی. سپس با مثال‌های گسترده مدیریتی — از تابع تقاضا تا تابع سود و تولید — کاربردش را در تصمیم‌گیری می‌بینی. هدف نهایی: بتوانی هر پدیده مدیریتی را با زبان تابع مدل کنی و رفتار آن را پیش‌بینی کنی.

۲.۳ اهداف یادگیری

- **تعریف کند:** زوج مرتب، رابطه، دامنه، برد، همدامنه، تابع، تابع یک‌به‌یک، پوشا، معکوس.
- **تشخیص دهد:** آیا یک رابطه تابع است؟ آیا تابع یک‌به‌یک است؟ آیا معکوس‌پذیر است؟
- **محاسبه کند:** دامنه و برد توابع مختلف، ترکیب توابع، تابع معکوس.
- **تحلیل کند:** آزمون خط عمودی و افقی، رفتار توابع در محدوده اقتصادی.
- **مدل‌سازی کند:** یک مسئله مدیریتی را با تابع بیان کند و پارامترهایش را تفسیر کند.
- **ارزیابی کند:** کدام نوع تابع برای کدام پدیده مدیریتی مناسب‌تر است.

۳.۳ مقدمه طنز

تصور کن در یک شرکت، مدیر منابع انسانی می‌خواهد به هر کارمند دقیقاً یک حقوق بدهد. اگر به یک کارمند دو حقوق بدهد، حسابدار سکته می‌زند. اگر به دو کارمند یک حقوق بدهد، کارمندها شورش می‌کنند. این دقیقاً تعریف «تابع» است: به هر ورودی، دقیقاً یک خروجی.

رابطه و تابع مثل دو برادر هستند: رابطه بزرگ‌تر و شل‌تر است (هر ورودی می‌تواند چند خروجی داشته باشد)، اما تابع کوچک‌تر و سخت‌گیرتر است (هر ورودی دقیقاً یک خروجی). در مدیریت، تقریباً همیشه با تابع سر و کار داری، چون تصمیم‌ها باید قطعی باشند. اگر تابع تقاضا به ازای هر قیمت، دو مقدار مختلف بدهد، مدیر نمی‌داند چه‌کار کند — و این یعنی فاجعه.

اما داستان به همینجا ختم نمی‌شود. گاهی مدیر می‌خواهد برعکس عمل کند: از خروجی به ورودی برسد. مثلاً «اگر بخواهم ۱۰۰۰ واحد بفروشم، قیمت باید چقدر باشد؟» اینجاست که مفهوم «تابع معکوس» وارد می‌شود — و اگر تابع یک‌به‌یک نباشد، معکوس‌سازی ممکن نیست. پس این فصل، تو را از «تفکر رو به جلو» به «تفکر دوطرفه» می‌برد.

۴.۳ مفاهیم اصلی

۱.۴.۳ مفهوم ۱: زوج مرتب و ضرب دکارتی

تعریف: زوج مرتب (a, b) یعنی دو شیء با ترتیب مشخص. تساوی زوج‌های مرتب:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ و } b = d$$

نکته مهم: $(1, 2) \neq (2, 1)$ — ترتیب حیاتی است.
شهود: زوج مرتب مثل «آدرس» است: (خیابان، پلاک) با (پلاک، خیابان) فرق دارد.

مثال ساده: $(2,5) = (2,5)$ اما $(2,5) \neq (5,2)$.
مثال مدیریتی: در یک پایگاه داده، هر رکورد مشتری یک زوج مرتب است: (شناسه مشتری، مبلغ خرید). اگر دو رکورد جابه‌جا شوند، معنی کاملاً عوض می‌شود.
تعریف ضرب دکارتی:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

خاصیت: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
مثال عددی: $A = \{1,2\}$، $B = \{x,y,z\}$

$$A \times B = \{(1,x),(1,y),(1,z),(2,x),(2,y),(2,z)\}$$

و $|A \times B| = 2 \times 3 = 6$.
مثال مدیریتی: در یک شرکت، A = مجموعه ۵ محصول، B = مجموعه ۳ منطقه فروش. آنگاه $A \times B$ شامل ۱۵ ترکیب (محصول، منطقه) است که مدیر می‌تواند برای هرکدام استراتژی جداگانه تعریف کند. این پایه‌ای برای «ماتریس محصول‌ـ بازار» است.

۲.۴.۳ مفهوم ۲: رابطه

تعریف: رابطه R از مجموعه A به مجموعه B، زیرمجموعه‌ای از $A \times B$ است:

$$R \subseteq A \times B$$

شهود: رابطه یعنی «ارتباط» بین اعضای دو مجموعه. مثلاً «کارمند X در پروژه Y کار می‌کند».
مثال ساده: $A = \{1,2,3\}$، $B = \{a,b\}$. رابطه $R = \{(1,a),(2,a),(3,b)\}$.
مثال مدیریتی: A = مجموعه کارمندان، B = مجموعه پروژه‌ها. رابطه R = «کارمند در پروژه کار می‌کند». اگر کارمند ۱ در پروژه‌های a و b کار کند، هر دو زوج $(1,a)$ و $(1,b)$ در R هستند.
انواع رابطه:

- **رابطه بازتابی :(Reflexive)** هر عضو با خودش رابطه دارد: $\forall a \in A : (a,a) \in R$.
- **رابطه تقارنی :(Symmetric)** اگر $(a,b) \in R$ آنگاه $(b,a) \in R$.
- **رابطه تعدی :(Transitive)** اگر $(a,b) \in R$ و $(b,c) \in R$ آنگاه $(a,c) \in R$.
- **رابطه هم‌ارزی :(Equivalence)** رابطه‌ای که بازتابی، تقارنی و تعدی باشد.

مثال مدیریتی از رابطه هم‌ارزی: در یک شرکت، رابطه «در یک دپارتمان کار می‌کند» یک رابطه هم‌ارزی است. این رابطه، کارمندان را به دپارتمان‌ها افراز می‌کند.

۳.۴.۳ مفهوم ۳: دامنه، برد، همدامنه

تعریف:

- **دامنه :(Domain)** مجموعه تمام ورودی‌های مجاز.
- **برد :(Range)** مجموعه تمام خروجی‌های واقعی.
- **همدامنه :(Codomain)** مجموعه تمام خروجی‌های بالقوه.

فرمول:

$$\text{Dom}(f) = \{x \mid f(x)\text{ تعریف شده} \}$$
$$\text{Range}(f) = \{y \mid \exists x : y = f(x)\}$$

رابطه بین سه مجموعه:

$$\text{Range}(f) \subseteq \text{Codomain}(f)$$

مثال ساده: $f(x) = x^2$ با دامنه $\mathbb{R}$. دامنه $= \mathbb{R}$، برد $= [0, +\infty)$، همدامنه $= \mathbb{R}$.
مثال مدیریتی: تابع هزینه $C(q) = 100 + 5q$ که q تعداد محصول است. دامنه $= [0, +\infty)$، برد $= [100, +\infty)$، همدامنه $= \mathbb{R}$.

۴.۴.۳ مفهوم ۴: تابع

تعریف: تابع f از A به B، رابطه‌ای است که به هر عضو A، دقیقاً یک عضو B نسبت می‌دهد:

$$f : A \to B, \quad \forall x \in A,\ \exists! y \in B : y = f(x)$$

شهود: تابع مثل یک ماشین است: ورودی بده، خروجی بگیر. هر ورودی دقیقاً یک خروجی.
آزمون خط عمودی: اگر نمودار یک رابطه را رسم کنی و هیچ خط عمودی بیش از یک بار آن را قطع نکند، آن رابطه تابع است.
مثال ساده: $f(x) = 2x + 1$ یک تابع است. $x^2 + y^2 = 1$ یک تابع نیست (چون برای $x = 0$، دو مقدار $y = 1$ و $y = -1$).
مثال مدیریتی: تابع تقاضا $Q(P) = 1000 - 20P$ یک تابع است: به ازای هر قیمت P، دقیقاً یک مقدار تقاضا Q داریم.

۵.۴.۳ مفهوم ۵: توابع یک‌به‌یک (Injective)

تعریف: تابع f یک‌به‌یک است اگر:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

یا به‌طور معادل:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

شهود: در تابع یک‌به‌یک، هیچ دو ورودی مختلفی خروجی یکسان نمی‌دهند.
آزمون خط افقی: اگر هیچ خط افقی نمودار را بیش از یک بار قطع نکند، تابع یک‌به‌یک است.
مثال ساده: $f(x) = 2x + 1$ یک‌به‌یک است. $f(x) = x^2$ یک‌به‌یک نیست (چون $f(2) = f(-2) = 4$).
مثال مدیریتی: اگر تابع تقاضا یک‌به‌یک باشد، می‌توان قیمت را برحسب تقاضا بیان کرد: $P = f^{-1}(Q)$. اگر یک‌به‌یک نباشد، این کار ممکن نیست.

۶.۴.۳ مفهوم ۶: توابع پوشا (Surjective)

تعریف: تابع $f : A \to B$ پوشا است اگر:

$$\forall y \in B,\ \exists x \in A : f(x) = y$$

یعنی برد برابر همدامنه باشد: $\text{Range}(f) = B$.
شهود: در تابع پوشا، هر عضو همدامنه «هدف» قرار می‌گیرد.
مثال ساده: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با $f(x) = 2x + 1$ پوشا است. اما $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با $f(x) = x^2$ پوشا نیست (چون اعداد منفی در برد نیستند).
مثال مدیریتی: اگر تابع سود پوشا باشد، هر مقدار سود هدف قابل دستیابی است.

۷.۴.۳ مفهوم ۷: توابع دوسویه (Bijective) و معکوس

تعریف: تابعی که هم یک‌به‌یک و هم پوشا باشد، دوسویه نامیده می‌شود.
قضیه: تابع f معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر دوسویه باشد.
تابع معکوس:

$$f^{-1}: B \to A, \quad f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

خاصیت:

$$f(f^{-1}(x)) = x, \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

روش یافتن معکوس:

۱. $y = f(x)$ بنویس.

۲. x را برحسب y حل کن.

۳. x و y را جابه‌جا کن.

مثال ساده: $f(x) = 2x + 3$. معکوس:

$$y = 2x + 3 \tag{۱۵}$$
$$y - 3 = 2x \tag{۱۶}$$
$$x = \frac{y-3}{2} \tag{۱۷}$$
$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2} \tag{۱۸}$$

مثال مدیریتی: تابع تقاضا $Q(P) = 1000 - 20P$. معکوس (تابع قیمت):

$$Q = 1000 - 20P \tag{۱۹}$$
$$20P = 1000 - Q \tag{۲۰}$$
$$P = 50 - \frac{Q}{20} \tag{۲۱}$$

یعنی اگر بخواهیم Q واحد بفروشیم، قیمت باید $50 - Q/20$ باشد.

۸.۴.۳ مفهوم ۸: ترکیب توابع

تعریف:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

شهود: ابتدا g را اعمال کن، سپس f.
نکته: $(f \circ g) \neq (g \circ f)$ در حالت کلی.
مثال ساده: $f(x) = 2x + 1$، $g(x) = x^2$

$$(f \circ g)(x) = f(x^2) = 2x^2 + 1 \tag{۲۲}$$
$$(g \circ f)(x) = g(2x+1) = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 \tag{۲۳}$$

مثال مدیریتی: فرض کن $g(x)$ = تعداد محصول تولیدی برحسب تعداد کارگر x، و $f(y)$ = هزینه تولید برحسب تعداد محصول y. آنگاه $(f \circ g)(x)$ = هزینه برحسب تعداد کارگر.

۹.۴.۳ مفهوم ۹: توابع چندمتغیره

تعریف: تابعی که به چند ورودی، یک خروجی می‌دهد:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

مثال مدیریتی: تابع سود $P(x, y) = 10x + 15y - 2xy$ که x و y مقدار دو محصول هستند.
دامنه: مجموعه نقاطی که تابع در آن‌ها تعریف شده.

۱۰.۴.۳ مفهوم ۱۰: انواع تابع

نوع	فرمول	مثال مدیریتی
خطی	$f(x) = ax + b$	هزینه ثابت + متغیر
درجه دوم	$f(x) = ax^2 + bx + c$	سود کل
نمایی	$f(x) = a^x$	رشد سرمایه
لگاریتمی	$f(x) = \log_a x$	مطلوبیت
قدر مطلق	$f(x) = \lvert x \rvert$	فاصله از هدف
پله‌ای	$f(x) = \lfloor x \rfloor$	تعرفه پله‌ای

۵.۳ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: تشخیص تابع
صورت مسئله: کدام رابطه تابع است؟

- $R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
- $R_2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$
- $R_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

مرحله ۱: R_1: هر ورودی دقیقاً یک خروجی $\Rightarrow$ تابع.
مرحله ۲: R_2: ورودی ۱ دو خروجی دارد (۲ و ۳) $\Rightarrow$ تابع نیست.
مرحله ۳: R_3: هر ورودی دقیقاً یک خروجی $\Rightarrow$ تابع.
نتیجه: R_1 و R_3 تابع هستند؛ R_2 تابع نیست.

مثال حل‌شده

مثال ۲: دامنه و برد
صورت مسئله: دامنه و برد $f(x) = \sqrt{x - 2}$ را بیاب.
مرحله ۱: زیر رادیکال باید ≥ 0: $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$.
مرحله ۲: دامنه $= [2, +\infty)$.
مرحله ۳: خروجی رادیکال همیشه ≥ 0.
مرحله ۴: برد $= [0, +\infty)$.
نتیجه: دامنه $[2, +\infty)$، برد $[0, +\infty)$.

مثال حل‌شده

مثال ۳: تابع تقاضا

صورت مسئله: تابع تقاضای یک محصول $Q(P) = 500 - 10P$. دامنه و برد را در محدوده اقتصادی بیاب.

مرحله ۱: قیمت منفی معنی ندارد: $P \geq 0$.

مرحله ۲: تقاضا منفی معنی ندارد: $500 - 10P \geq 0 \Rightarrow P \leq 50$.

مرحله ۳: دامنه اقتصادی $= [0, 50]$.

مرحله ۴: برد $= [0, 500]$.

نتیجه: دامنه $[0, 50]$، برد $[0, 500]$.

مثال حل‌شده

مثال ۴: تابع سود

صورت مسئله: تابع درآمد $R(q) = 20q$ و هزینه $C(q) = 100 + 5q$. تابع سود را بیاب و سود در $q = 20$ را حساب کن.

مرحله ۱: سود $=$ درآمد $-$ هزینه.

مرحله ۲: $P(q) = 20q - (100 + 5q) = 15q - 100$.

مرحله ۳: $P(20) = 15(20) - 100 = 300 - 100 = 200$.

نتیجه: $P(q) = 15q - 100$؛ سود در ۲۰ واحد $= 200$.

مثال حل‌شده

مثال ۵: ترکیب توابع

صورت مسئله: $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x^2$. $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ را بیاب.

مرحله ۱: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1$.

مرحله ۲: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$.

نتیجه: ترکیب توابع جابه‌جایی‌پذیر نیست.

مثال حل‌شده

مثال ۶: کاربرد در تولید

صورت مسئله: در یک کارخانه، تابع تولید $Q(L) = 10\sqrt{L}$ که L تعداد کارگر است. اگر ۲۵ کارگر داشته باشیم، تولید چقدر است؟ اگر بخواهیم ۱۰۰ واحد تولید کنیم، چند کارگر لازم است؟

مرحله ۱: $Q(25) = 10\sqrt{25} = 10 \times 5 = 50$.

مرحله ۲: $100 = 10\sqrt{L} \Rightarrow \sqrt{L} = 10 \Rightarrow L = 100$.

نتیجه: با ۲۵ کارگر، ۵۰ واحد؛ برای ۱۰۰ واحد، ۱۰۰ کارگر لازم است.

مثال حل‌شده

مثال ۷: یافتن تابع معکوس
صورت مسئله: $f(x) = 3x - 6$. تابع معکوس را بیاب و $f^{-1}(9)$ را حساب کن.
مرحله ۱: $y = 3x - 6$.
مرحله ۲: $y + 6 = 3x \Rightarrow x = \frac{y+6}{3}$.
مرحله ۳: $f^{-1}(x) = \frac{x+6}{3}$.
مرحله ۴: $f^{-1}(9) = \frac{9+6}{3} = \frac{15}{3} = 5$.
بررسی: $f(5) = 3(5) - 6 = 15 - 6 = 9$. ✓
نتیجه: $f^{-1}(x) = \frac{x+6}{3}$؛ $f^{-1}(9) = 5$.

مثال حل‌شده

مثال ۸: تشخیص یک‌به‌یک
صورت مسئله: آیا $f(x) = x^2$ روی دامنه $[0, +\infty)$ یک‌به‌یک است؟
مرحله ۱: فرض کن $f(x_1) = f(x_2)$: $x_1^2 = x_2^2$.
مرحله ۲: روی $[0, +\infty)$، جذر مثبت است: $x_1 = x_2$.
مرحله ۳: پس یک‌به‌یک است.
نکته: اما روی $\mathbb{R}$، یک‌به‌یک نیست (چون $f(-2) = f(2)$).
نتیجه: بله، روی $[0, +\infty)$ یک‌به‌یک است.

مثال حل‌شده

مثال ۹: تابع هزینه پله‌ای
صورت مسئله: یک شرکت اینترنتی هزینه اشتراک ماهانه را به‌صورت پله‌ای محاسبه می‌کند: تا ۵۰ گیگ، ۱۰۰ هزار تومان؛ بیش از ۵۰ گیگ، به ازای هر گیگ اضافه ۳ هزار تومان. تابع هزینه را بنویس و هزینه ۷۰ گیگ را حساب کن.
مرحله ۱: تعریف تابع:

$$C(x) = \begin{cases} 100 & 0 \le x \le 50 \\ 100 + 3(x - 50) & x > 50 \end{cases}$$

مرحله ۲: $C(70) = 100 + 3(70 - 50) = 100 + 60 = 160$.
نتیجه: هزینه ۷۰ گیگ، ۱۶۰ هزار تومان است.

مثال حل‌شده

مثال ۱۰: مدل‌سازی با تابع چندمتغیره
صورت مسئله: یک شرکت دو محصول تولید می‌کند. تابع درآمد $R(x, y) = 20x + 30y$ و تابع هزینه $C(x, y) = 100 + 5x + 8y + 0.1xy$. تابع سود را بیاب و سود در $x = 10$، $y = 15$ را حساب کن.
مرحله ۱: $P(x, y) = R(x, y) - C(x, y)$.
مرحله ۲: $P(x, y) = 20x + 30y - 100 - 5x - 8y - 0.1xy$.
مرحله ۳: $P(x, y) = 15x + 22y - 0.1xy - 100$.
مرحله ۴: $P(10, 15) = 15(10) + 22(15) - 0.1(10)(15) - 100 = 150 + 330 - 15 - 100 = 365$.
نتیجه: سود در $x = 10$ و $y = 15$ برابر ۳۶۵ است.

۶.۳ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه ۱: اشتباه بین دامنه و برد.
راه پیشگیری: دامنه = ورودی، برد = خروجی.
اشتباه ۲: فرض تابع بودن هر رابطه.
راه پیشگیری: آزمون خط عمودی را فراموش نکن.
اشتباه ۳: فراموش کردن محدودیت‌های اقتصادی در دامنه.
راه پیشگیری: قیمت و مقدار منفی معنی ندارند.
اشتباه ۴: فرض $(f \circ g) = (g \circ f)$.
راه پیشگیری: ترکیب توابع جابه‌جایی‌پذیر نیست.
اشتباه ۵: فرض معکوس‌پذیری هر تابع.
راه پیشگیری: ابتدا یک‌به‌یک بودن را بررسی کن.
اشتباه ۶: اشتباه در محاسبه دامنه توابع رادیکالی یا کسری.
راه پیشگیری: زیر رادیکال ≥ 0 و مخرج $\neq 0$.

۷.۳ کاربرد در مدیریت

مثال واقعی ۱: اسنپ برای محاسبه هزینه سفر از تابع $C(d) = 5000 + 3000d$ استفاده می‌کند که d مسافت (کیلومتر) است. این یک تابع خطی است.

مثال واقعی ۲: ایرانسل برای محاسبه قبض مشتریان از تابع پله‌ای استفاده می‌کند: تا ۱۰ گیگ، مبلغ ثابت؛ بیش از آن، به ازای هر گیگ اضافه.

مثال واقعی ۳: دیجی‌کالا برای پیش‌بینی فروش از تابع تقاضا استفاده می‌کند: $Q(P) = 10000 - 50P$. با این تابع، مدیر می‌تواند قیمت بهینه را پیدا کند.

مثال واقعی ۴: بانک ملت برای محاسبه سود سپرده از تابع نمایی استفاده می‌کند: $A(t) = P(1+r)^t$.

۸.۳ خلاصه فصل

مفهوم	تعریف
زوج مرتب	(a, b) با ترتیب مشخص
رابطه	زیرمجموعه $A \times B$
تابع	هر ورودی دقیقاً یک خروجی
دامنه	مجموعه ورودی‌های مجاز
برد	مجموعه خروجی‌های واقعی
یک‌به‌یک	$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
پوشا	$\text{Range} = \text{Codomain}$
دوسویه	یک‌به‌یک و پوشا
معکوس	$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$
ترکیب	$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

۹.۳ خودآزمایی

۱.۹.۳ چهارگزینه‌ای (۱۲ سوال)

۱. کدام رابطه تابع است؟

آ) $\{(1,2),(1,3)\}$

ب) $\{(1,2),(2,2),(3,2)\}$

ج) $\{(1,2),(2,3),(2,4)\}$

د) $\{(1,1),(1,2),(1,3)\}$

۲. دامنه $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ کدام است؟

آ) $\mathbb{R}$

ب) $\mathbb{R}-\{3\}$

ج) $[3,+\infty)$

د) $(-\infty,3]$

۳. اگر $f(x)=3x-2$، آنگاه $f(4)$ چند است؟

آ) ۱۰

ب) ۱۲

ج) ۱۴

د) ۱۶

۴. برد $f(x)=x^2+1$ کدام است؟

آ) $\mathbb{R}$

ب) $[0,+\infty)$

ج) $[1,+\infty)$

د) $(-\infty,1]$

۵. اگر $f(x)=x+1$ و $g(x)=2x$، آنگاه $(f\circ g)(3)$ چند است؟

آ) ۶

ب) ۷

ج) ۸

د) ۹

۶. کدام تابع یک‌به‌یک است؟

آ) $f(x)=x^2$

ب) $f(x) = |x|$

ج) $f(x) = 2x + 1$

د) $f(x) = x^4$

۷. معکوس $f(x) = 5x - 10$ کدام است؟

آ) $\frac{x+10}{5}$

ب) $\frac{x-10}{5}$

ج) $5x + 10$

د) $\frac{5}{x-10}$

۸. اگر $|A| = 3$ و $|B| = 4$، آنگاه $|A \times B|$ چند است؟

آ) ۷

ب) ۱۲

ج) ۳۴

د) ۴۳

۹. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با $f(x) = x^2$ پوشا است؟

آ) بله

ب) خیر

ج) فقط برای اعداد مثبت

د) فقط برای اعداد منفی

۱۰. کدام رابطه هم‌ارزی است؟

آ) $<$

ب) $\leq$

ج) $=$

د) $\neq$

۱۱. اگر $f(x) = \sqrt{x}$، دامنه کدام است؟

آ) $\mathbb{R}$

ب) $[0, +\infty)$

ج) $(-\infty, 0]$

د) $(0, +\infty)$

۱۲. اگر $f(x) = 2x$ و $g(x) = x + 3$، $(g \circ f)(2)$ چند است؟

آ) ۵

ب) ۷

ج) ۹

د) ۱۱

۲.۹.۳ تشریحی (۵ سوال)

۱۳. دامنه و برد $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ را بیاب.
۱۴. تابع سود $P(q) = -2q^2 + 40q - 100$. سود در $q = 10$ چقدر است؟
۱۵. اگر $f(x) = 2x$ و $g(x) = x^2 + 1$، $(g \circ f)(2)$ را حساب کن.
۱۶. معکوس $f(x) = \frac{2x+1}{3}$ را بیاب.
۱۷. ثابت کن $f(x) = 3x + 2$ یک‌به‌یک است.

۱۰.۳ پاسخنامه تشریحی

۱. ب) فقط گزینه ب هر ورودی را به یک خروجی می‌نگارد.
۲. ب) مخرج نباید صفر شود: $x \neq 3$.
۳. الف) $f(4) = 3(4) - 2 = 10$.
۴. ج) $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1$.
۵. ب) $g(3) = 6$، $f(6) = 7$.
۶. ج) فقط تابع خطی یک‌به‌یک است.
۷. الف) $y = 5x - 10 \Rightarrow x = \frac{y+10}{5}$.
۸. ب) $3 \times 4 = 12$.
۹. ب) خیر، چون اعداد منفی در برد نیستند.
۱۰. ج) رابطه = بازتابی، تقارنی و تعدی است.
۱۱. ب) زیر رادیکال ≥ 0.
۱۲. ب) $f(2) = 4$، $g(4) = 7$.
۱۳. دامنه: $4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$. برد: $[0, 2]$.
۱۴. $P(10) = -2(100) + 40(10) - 100 = -200 + 400 - 100 = 100$.
۱۵. $f(2) = 4$، $g(4) = 16 + 1 = 17$.
۱۶. $y = \frac{2x+1}{3} \Rightarrow 3y = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{3y-1}{2}$. پس $f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2}$.
۱۷. فرض $f(x_1) = f(x_2)$: $3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. پس یک‌به‌یک است.

۱۱.۳ منابع پیشنهادی

- پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. فصل ۲.
- رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. فصل ۲.
- T. S. Tan، (۲۰۱۹). *Applied Mathematics for Managerial، Social and Life Sci-ences*. Ch. Cengage. ۲.
- A. S. Salzman، (۲۰۱۷). *Mathematics for Business*. Ch. McGraw-Hill. ۲.

ایست بازرسی

پایان فصل ۲ — نسخه توسعه‌یافته
آمار: ∼۱۶ صفحه A۴ | ۱۰ مثال حل‌شده | ۱۷ سوال | ۴ منبع

۴ فصل ۳: توابع خطی و درجه دوم

۱.۴ چکیده

توابع خطی و درجه دوم، پرکاربردترین توابع در مدیریت هستند. تابع خطی، مدل ساده‌ای برای هزینه، درآمد و تقاضا فراهم می‌کند. تابع درجه دوم، برای مدل‌سازی سود، بهینه‌سازی و مسائل ماکسیمم/مینیمم به کار می‌رود. در این فصل، شیب، عرض از مبدأ، اشکال مختلف معادله خط، سهمی، رأس، ریشه‌ها، و کاربردهای گسترده مدیریتی را می‌آموزی. هدف: بتوانی مسائل نقطه سربه‌سر، حداکثر سود، و حداقل هزینه را حل کنی.

۲.۴ اهداف یادگیری

- **تعریف کند:** تابع خطی، شیب، عرض از مبدأ، تابع درجه دوم، سهمی، رأس.
- **محاسبه کند:** شیب از دو نقطه، معادله خط، رأس سهمی، ریشه‌های معادله درجه دوم.
- **تحلیل کند:** رفتار تابع خطی و درجه دوم در محدوده اقتصادی.
- **حل کند:** مسائل نقطه سربه‌سر، حداکثر سود، حداقل هزینه.
- **مدل‌سازی کند:** یک مسئله مدیریتی را با تابع خطی یا درجه دوم بیان کند.

۳.۴ مقدمه طنز

تصور کن یک مدیر کارخانه می‌خواهد بداند «اگر ۱۰۰ واحد تولید کنم، چقدر سود می‌کنم؟ اگر ۲۰۰ واحد تولید کنم، چقدر؟» اگر بلد نباشد تابع سود را بنویسد، مجبور است برای هر مقدار تولید، یک آزمایش جداگانه انجام دهد — کاری که هم پرهزینه است هم زمان‌بر.

توابع خطی و درجه دوم، دو ابزار ساده اما قدرتمند هستند. تابع خطی مثل «چاقوی آشپزخانه» است: ساده، همه‌کاره، و همیشه به کار می‌آید. تابع درجه دوم مثل «چاقوی سرآشپز» است: تخصصی‌تر، اما برای کارهای ظریف (مثل بهینه‌سازی) بی‌رقیب.

نکته طنزآمیز اینجاست: بسیاری از مدیران فکر می‌کنند «سود همیشه با افزایش تولید زیاد می‌شود». اما تابع سود درجه دوم (سهمی) به ما می‌گوید سود تا یک نقطه خاص زیاد می‌شود، بعد کم می‌شود. این نقطه، همان «رأس سهمی» است — و اگر مدیر آن را نداند، ممکن است با تولید بیش از حد، ضرر کند. پس این فصل، تو را از «تفکر خطی» به «تفکر غیرخطی» می‌برد.

۴.۴ مفاهیم اصلی

۱.۴.۴ مفهوم ۱: تابع خطی

تعریف: تابع خطی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = ax + b$$

که a شیب و b عرض از مبدأ است.

شهود: تابع خطی، یک خط راست است. شیب، میزان «تندی» خط را نشان می‌دهد.

فرمول شیب:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

تفسیر شیب در مدیریت: شیب، «نرخ تغییر» است. مثلاً اگر تابع هزینه $C(q) = 5q + 100$، شیب ۵ یعنی «به ازای هر واحد اضافه تولید، هزینه ۵ واحد افزایش می‌یابد».

اشکال مختلف معادله خط:

۱. **فرم شیب‌ـ‌عرض:** $y = ax + b$

۲. **فرم نقطه‌ـ‌شیب:** $y - y_1 = a(x - x_1)$

۳. **فرم دو نقطه‌ای:** $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

۴. **فرم استاندارد:** $Ax + By = C$

مثال ساده: $f(x) = 2x + 3$. شیب $= 2$، عرض از مبدأ $= 3$.
مثال مدیریتی: تابع هزینه $C(q) = 5q + 100$. هزینه ثابت $= 100$، هزینه متغیر هر واحد $= 5$.

۲.۴.۴ مفهوم ۲: یافتن معادله خط

روش ۱: با شیب و یک نقطه

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

روش ۲: با دو نقطه

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad y - y_1 = a(x - x_1)$$

مثال عددی: خطی که از $(1, 2)$ و $(3, 8)$ می‌گذرد:

$$a = \frac{8 - 2}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y - 2 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 1$$

مثال مدیریتی: فرض کن هزینه تولید ۱۰ واحد، ۲۰۰ هزار تومان و هزینه تولید ۲۰ واحد، ۳۰۰ هزار تومان است. تابع هزینه خطی را بیاب.

$$a = \frac{300 - 200}{20 - 10} = \frac{100}{10} = 10$$

$$C - 200 = 10(q - 10) \Rightarrow C = 10q + 100$$

هزینه ثابت $= 100$، هزینه متغیر هر واحد $= 10$.

۳.۴.۴ مفهوم ۳: تابع درجه دوم

تعریف: تابع درجه دوم به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

شهود: نمودار تابع درجه دوم، یک «سهمی» (Parabola) است. اگر $a > 0$، سهمی رو به بالا باز می‌شود (مینیمم دارد). اگر $a < 0$، رو به پایین باز می‌شود (ماکسیمم دارد).
رأس سهمی:

$$x_v = -\frac{b}{2a}, \quad y_v = f(x_v) = c - \frac{b^2}{4a}$$

محور تقارن: خط عمودی $x = -\frac{b}{2a}$.
ریشه‌ها (صفرهای تابع):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مبیّن (Discriminant): $\Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta > 0$: دو ریشه حقیقی متمایز.
- $\Delta = 0$: یک ریشه مضاعف.
- $\Delta < 0$: بدون ریشه حقیقی.

مثال ساده: $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

- $a = 1 > 0$: رو به بالا.
- $x_v = -\frac{-4}{2(1)} = 2$.
- $y_v = f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$.
- ریشه‌ها: $x = 1$ و $x = 3$.

مثال مدیریتی: تابع سود $P(q) = -2q^2 + 40q - 100$.

- $a = -2 < 0$: رو به پایین، ماکسیمم دارد.
- $q_v = -\frac{40}{2(-2)} = 10$.
- $P(10) = -200 + 400 - 100 = 100$.
- حداکثر سود $= 100$ در $q = 10$.

۴.۴.۴ مفهوم ۴: نقطه سربه‌سر (Break-Even Point)

تعریف: نقطه‌ای که درآمد برابر هزینه است:

$$R(q) = C(q)$$

مثال مدیریتی: $R(q) = 20q$، $C(q) = 10q + 200$.

$$20q = 10q + 200 \Rightarrow 10q = 200 \Rightarrow q = 20$$

نقطه سربه‌سر: ۲۰ واحد.

۵.۴.۴ مفهوم ۵: بهینه‌سازی با تابع درجه دوم

قضیه: تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- اگر $a > 0$: مینیمم در $x = -\frac{b}{2a}$.
- اگر $a < 0$: ماکسیمم در $x = -\frac{b}{2a}$.

مثال مدیریتی: یک شرکت می‌خواهد سود را ماکسیمم کند:

$$P(q) = -3q^2 + 60q - 150$$

$$q^* = -\frac{60}{2(-3)} = 10$$

$$P(10) = -300 + 600 - 150 = 150$$

حداکثر سود: ۱۵۰ در تولید ۱۰ واحد.

۵.۴ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: یافتن معادله خط
صورت مسئله: خطی که از $(2,5)$ و $(4,11)$ می‌گذرد را بیاب.
مرحله ۱: $a = \frac{11-5}{4-2} = \frac{6}{2} = 3$.
مرحله ۲: $y - 5 = 3(x-2)$.
مرحله ۳: $y = 3x - 1$.
نتیجه: $y = 3x - 1$.

مثال حل‌شده

مثال ۲: تابع هزینه خطی
صورت مسئله: هزینه تولید ۵۰ واحد، ۷۰۰ هزار تومان و هزینه تولید ۱۰۰ واحد، ۱۲۰۰ هزار تومان است. تابع هزینه خطی را بیاب و هزینه ثابت را تعیین کن.
مرحله ۱: $a = \frac{1200-700}{100-50} = \frac{500}{50} = 10$.
مرحله ۲: $C - 700 = 10(q-50)$.
مرحله ۳: $C = 10q + 200$.
نتیجه: هزینه ثابت 200 = هزار تومان.

مثال حل‌شده

مثال ۳: رأس سهمی
صورت مسئله: $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$. رأس را بیاب.
مرحله ۱: $x_v = -\frac{-8}{2(2)} = 2$.
مرحله ۲: $y_v = f(2) = 2(4) - 8(2) + 5 = 8 - 16 + 5 = -3$.
نتیجه: رأس $=: (2,-3)$؛ مینیمم.

مثال حل‌شده

مثال ۴: نقطه سربه‌سر
صورت مسئله: $R(q) = 30q$، $C(q) = 15q + 300$. نقطه سربه‌سر را بیاب.
مرحله ۱: $30q = 15q + 300$.
مرحله ۲: $15q = 300 \Rightarrow q = 20$.
مرحله ۳: $R(20) = 600$.
نتیجه: نقطه سربه‌سر در ۲۰ واحد و ۶۰۰ هزار تومان.

مثال حل‌شده

مثال ۵: حداکثر سود
صورت مسئله: $P(q) = -q^2 + 20q - 50$. حداکثر سود را بیاب.
مرحله ۱: $q^* = -\frac{20}{2(-1)} = 10$.
مرحله ۲: $P(10) = -100 + 200 - 50 = 50$.
نتیجه: حداکثر سود 50 = در $q = 10$.

مثال حل‌شده

مثال ۶: حداقل هزینه
صورت مسئله: $C(q) = q^2 - 10q + 50$. حداقل هزینه را بیاب.
مرحله ۱: $q^* = -\frac{-10}{2(1)} = 5$.
مرحله ۲: $C(5) = 25 - 50 + 50 = 25$.
نتیجه: حداقل هزینه $= 25$ در $q = 5$.

مثال حل‌شده

مثال ۷: ریشه‌های معادله درجه دوم
صورت مسئله: $x^2 - 5x + 6 = 0$. ریشه‌ها را بیاب.
مرحله ۱: $\Delta = 25 - 24 = 1$.
مرحله ۲: $x = \frac{5 \pm 1}{2}$.
مرحله ۳: $x_1 = 3$، $x_2 = 2$.
نتیجه: ریشه‌ها ۲ و ۳.

مثال حل‌شده

مثال ۸: کاربرد در تقاضا
صورت مسئله: تابع تقاضا $Q(P) = 100 - 2P$. تابع درآمد را بیاب و حداکثر درآمد را حساب کن.
مرحله ۱: $R(P) = P \cdot Q = P(100 - 2P) = 100P - 2P^2$.
مرحله ۲: $P^* = -\frac{100}{2(-2)} = 25$.
مرحله ۳: $R(25) = 2500 - 1250 = 1250$.
نتیجه: حداکثر درآمد $= 1250$ در قیمت ۲۵.

۶.۴ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه ۱: اشتباه در علامت شیب.
راه پیشگیری: شیب مثبت = صعودی، منفی = نزولی.
اشتباه ۲: فراموش کردن شرط $a \neq 0$ در تابع درجه دوم.
راه پیشگیری: اگر $a = 0$، تابع خطی است.
اشتباه ۳: اشتباه در محاسبه رأس.
راه پیشگیری: فرمول $x_v = -\frac{b}{2a}$ را حفظ کن.
اشتباه ۴: فراموش کردن بررسی جهت سهمی.
راه پیشگیری: $a > 0$ مینیمم، $a < 0$ ماکسیمم.
اشتباه ۵: اشتباه در علامت مبیّن.
راه پیشگیری: $\Delta = b^2 - 4ac$.

۷.۴ کاربرد در مدیریت

مثال واقعی ۱: شرکت ایران‌خودرو برای محاسبه هزینه تولید هر خودرو از تابع خطی $C(q) = 500q + 10000000$ استفاده می‌کند.

مثال واقعی ۲: فروشگاه دیجی‌کالا برای بهینه‌سازی سود از تابع درجه دوم $P(q) = -2q^2 + 100q - 500$ استفاده می‌کند.

مثال واقعی ۳: بانک مرکزی برای تحلیل تقاضای پول از تابع درجه دوم استفاده می‌کند.

۸.۴ خلاصه فصل

مفهوم	فرمول	کاربرد
تابع خطی	$f(x) = ax + b$	هزینه، درآمد
شیب	$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$	نرخ تغییر
تابع درجه دوم	$f(x) = ax^2 + bx + c$	سود، بهینه‌سازی
رأس	$x_v = -\frac{b}{2a}$	ماکسیمم/مینیمم
ریشه	$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	نقطه سربه‌سر
مبیّن	$\Delta = b^2 - 4ac$	تعداد ریشه‌ها

۹.۴ خودآزمایی

۱.۹.۴ چهارگزینه‌ای (۸ سوال)

۱. شیب خطی که از $(1, 3)$ و $(3, 7)$ می‌گذرد:

آ) ۱

ب) ۲

ج) ۳

د) ۴

۲. رأس $f(x) = x^2 - 6x + 5$:

آ) $(3, -4)$

ب) $(3, 4)$

ج) $(-3, -4)$

د) $(6, 5)$

۳. اگر $a > 0$، سهمی:

آ) ماکسیمم دارد

ب) مینیمم دارد

ج) نه ماکسیمم نه مینیمم

د) بستگی دارد

۴. ریشه‌های $x^2 - 7x + 12 = 0$:

آ) ۳ و ۴

ب) ۲ و ۶

ج) ۱ و ۱۲

د) ۵ و ۲

۵. نقطه سربه‌سر $R = 20q$، $C = 10q + 100$:

آ) ۵

ب) ۱۰

ج) ۱۵

د) ۲۰

۶. حداکثر $f(x) = -x^2 + 4x + 1$:

آ) ۳

ب) ۴

ج) ۵

د) ۶

۷. اگر $\Delta < 0$، معادله:

آ) دو ریشه دارد

ب) یک ریشه دارد

ج) بدون ریشه حقیقی است

د) بی‌شمار ریشه دارد

۸. تابع $f(x) = 3x - 5$ در $x = 4$:

آ) ۵

ب) ۷

ج) ۹

د) ۱۱

۲.۹.۴ تشریحی (۴ سوال)

۹. تابع هزینه خطی را بیاب که هزینه ۱۰ واحد ۲۰۰ و هزینه ۲۰ واحد ۳۰۰ باشد.
۱۰. رأس و ریشه‌های $f(x) = x^2 - 4x + 3$ را بیاب.
۱۱. $P(q) = -2q^2 + 40q - 100$. حداکثر سود را بیاب.
۱۲. نقطه سربه‌سر $R(q) = 50q$، $C(q) = 30q + 400$ را بیاب.

۱۰.۴ پاسخنامه تشریحی

۱. ب) $a = \frac{7-3}{3-1} = 2$.
۲. الف) $x_v = 3$، $y_v = 9 - 18 + 5 = -4$.
۳. ب) $a > 0$ یعنی رو به بالا، مینیمم.
۴. الف) $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$.
۵. ب) $20q = 10q + 100 \Rightarrow q = 10$.
۶. ج) $x^* = 2$، $f(2) = -4 + 8 + 1 = 5$.
۷. ج) بدون ریشه حقیقی.
۸. ب) $f(4) = 12 - 5 = 7$.
۹. $a = 10$، $C = 10q + 100$.
۱۰. رأس: $(2, -1)$؛ ریشه‌ها: ۱ و ۳.
۱۱. $q^* = 10$، $P(10) = 100$.
۱۲. $50q = 30q + 400 \Rightarrow q = 20$.

۱۱.۴ منابع پیشنهادی

- پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. فصل ۳.
- رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. فصل ۳.
- T. S. Tan، (۲۰۱۹). *Applied Mathematics for the Managerial، Social and Life Sci-ences*. Ch. ۳.
- E. Ummer، (۲۰۱۸). *Basic Mathematics for Economics، Business and Finance*. Rout-ledge. Ch. ۳.

ایست بازرسی

پایان فصل ۳
آمار: ∼۱۲ صفحه A۴ | ۸ مثال حل‌شده | ۱۲ سوال | ۴ منبع
سوال: ادامه دهم به فصل ۴ (توابع نمایی و لگاریتمی) یا بازبینی کنم؟

xcolor enumitem booktabs geometry amsmath،amssymb،amsthm [۱۲pt،a۴paper]article
xepersian hyperref tcolorbox
margin=۲.۵cm
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)
فصل ۲: رابطه و تابع (نسخه توسعه‌یافته) و فصل ۳: توابع خطی و درجه دوم تیم ۵ نفره معمار آموزشی ۱۳ مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۵ فصل ۲: رابطه و تابع (نسخه توسعه‌یافته — حجم دوبرابر)

۱.۵ چکیده

در فصل قبل با مجموعه‌ها آشنا شدی. حالا می‌خواهیم بین اعضای مجموعه‌ها «رابطه» برقرار کنیم. رابطه، پایه‌ای برای مفهوم تابع است — و تابع، قلب تپنده ریاضیات مدیریت. در این فصل، رابطه، انواع رابطه (بازتابی، تقارنی، تعدی)، دامنه، برد، تابع، توابع یک‌به‌یک، پوشا، معکوس، و ترکیب توابع را می‌آموزی. سپس با مثال‌های گسترده مدیریتی — از تابع تقاضا تا تابع سود و تولید — کاربردش را در تصمیم‌گیری می‌بینی. هدف نهایی: بتوانی هر پدیده مدیریتی را با زبان تابع مدل کنی و رفتار آن را پیش‌بینی کنی.

۲.۵ اهداف یادگیری

- **تعریف کند:** زوج مرتب، رابطه، دامنه، برد، همدامنه، تابع، تابع یک‌به‌یک، پوشا، معکوس.
- **تشخیص دهد:** آیا یک رابطه تابع است؟ آیا تابع یک‌به‌یک است؟ آیا معکوس‌پذیر است؟
- **محاسبه کند:** دامنه و برد توابع مختلف، ترکیب توابع، تابع معکوس.
- **تحلیل کند:** آزمون خط عمودی و افقی، رفتار توابع در محدوده اقتصادی.
- **مدل‌سازی کند:** یک مسئله مدیریتی را با تابع بیان کند و پارامترهایش را تفسیر کند.
- **ارزیابی کند:** کدام نوع تابع برای کدام پدیده مدیریتی مناسب‌تر است.

۳.۵ مقدمه طنز

تصور کن در یک شرکت، مدیر منابع انسانی می‌خواهد به هر کارمند دقیقاً یک حقوق بدهد. اگر به یک کارمند دو حقوق بدهد، حسابدار سکته می‌زند. اگر به دو کارمند یک حقوق بدهد، کارمندها شورش می‌کنند. این دقیقاً تعریف «تابع» است: به هر ورودی، دقیقاً یک خروجی.

رابطه و تابع مثل دو برادر هستند: رابطه بزرگ‌تر و شل‌تر است (هر ورودی می‌تواند چند خروجی داشته باشد)، اما تابع کوچک‌تر و سخت‌گیرتر است (هر ورودی دقیقاً یک خروجی). در مدیریت، تقریباً همیشه با تابع سر و کار داری، چون تصمیم‌ها باید قطعی باشند. اگر تابع تقاضا به ازای هر قیمت، دو مقدار مختلف بدهد، مدیر نمی‌داند چه‌کار کند — و این یعنی فاجعه.

اما داستان به همینجا ختم نمی‌شود. گاهی مدیر می‌خواهد برعکس عمل کند: از خروجی به ورودی برسد. مثلاً «اگر بخواهم ۱۰۰۰ واحد بفروشم، قیمت باید چقدر باشد؟» اینجاست که مفهوم «تابع معکوس» وارد می‌شود — و اگر تابع یک‌به‌یک نباشد، معکوس‌سازی ممکن نیست. پس این فصل، تو را از «تفکر رو به جلو» به «تفکر دوطرفه» می‌برد.

۴.۵ مفاهیم اصلی

۱.۴.۵ مفهوم ۱: زوج مرتب و ضرب دکارتی

تعریف: زوج مرتب (a, b) یعنی دو شیء با ترتیب مشخص. تساوی زوج‌های مرتب:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ و } b = d$$

نکته مهم: $(1, 2) \neq (2, 1)$ — ترتیب حیاتی است.
شهود: زوج مرتب مثل «آدرس» است: (خیابان، پلاک) با (پلاک، خیابان) فرق دارد.

مثال ساده: $(2,5) = (2,5)$ اما $(2,5) \neq (5,2)$.
مثال مدیریتی: در یک پایگاه داده، هر رکورد مشتری یک زوج مرتب است: (شناسه مشتری، مبلغ خرید). اگر دو رکورد جابه‌جا شوند، معنی کاملاً عوض می‌شود.
تعریف ضرب دکارتی:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

خاصیت: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
مثال عددی: $A = \{1,2\}$، $B = \{x,y,z\}$

$$A \times B = \{(1,x),(1,y),(1,z),(2,x),(2,y),(2,z)\}$$

و $|A \times B| = 2 \times 3 = 6$.
مثال مدیریتی: در یک شرکت، A = مجموعه ۵ محصول، B = مجموعه ۳ منطقه فروش. آنگاه $A \times B$ شامل ۱۵ ترکیب (محصول، منطقه) است که مدیر می‌تواند برای هرکدام استراتژی جداگانه تعریف کند. این پایه‌ای برای «ماتریس محصول‌ـ بازار» است.

۲.۴.۵ مفهوم ۲: رابطه

تعریف: رابطه R از مجموعه A به مجموعه B، زیرمجموعه‌ای از $A \times B$ است:

$$R \subseteq A \times B$$

شهود: رابطه یعنی «ارتباط» بین اعضای دو مجموعه. مثلاً «کارمند X در پروژه Y کار می‌کند».
مثال ساده: $A = \{1,2,3\}$، $B = \{a,b\}$. رابطه $R = \{(1,a),(2,a),(3,b)\}$.
مثال مدیریتی: A = مجموعه کارمندان، B = مجموعه پروژه‌ها. رابطه R = «کارمند در پروژه کار می‌کند». اگر کارمند ۱ در پروژه‌های a و b کار کند، هر دو زوج $(1,a)$ و $(1,b)$ در R هستند.
انواع رابطه:

- **رابطه بازتابی :(Reflexive)** هر عضو با خودش رابطه دارد: $\forall a \in A : (a,a) \in R$.
- **رابطه تقارنی :(Symmetric)** اگر $(a,b) \in R$ آنگاه $(b,a) \in R$.
- **رابطه تعدی :(Transitive)** اگر $(a,b) \in R$ و $(b,c) \in R$ آنگاه $(a,c) \in R$.
- **رابطه هم‌ارزی :(Equivalence)** رابطه‌ای که بازتابی، تقارنی و تعدی باشد.

مثال مدیریتی از رابطه هم‌ارزی: در یک شرکت، رابطه «در یک دپارتمان کار می‌کند» یک رابطه هم‌ارزی است. این رابطه، کارمندان را به دپارتمان‌ها افراز می‌کند.

۳.۴.۵ مفهوم ۳: دامنه، برد، همدامنه

تعریف:

- **دامنه :(Domain)** مجموعه تمام ورودی‌های مجاز.
- **برد :(Range)** مجموعه تمام خروجی‌های واقعی.
- **همدامنه :(Codomain)** مجموعه تمام خروجی‌های بالقوه.

فرمول:

$$\text{Dom}(f) = \{x \mid f(x)\text{ تعریف شده} \}$$
$$\text{Range}(f) = \{y \mid \exists x : y = f(x)\}$$

رابطه بین سه مجموعه:

$$\text{Range}(f) \subseteq \text{Codomain}(f)$$

مثال ساده: $f(x) = x^2$ با دامنه $\mathbb{R}$. دامنه $= \mathbb{R}$، برد $= [0, +\infty)$، همدامنه $= \mathbb{R}$.
مثال مدیریتی: تابع هزینه $C(q) = 100 + 5q$ که q تعداد محصول است. دامنه $= [0, +\infty)$، برد $= [100, +\infty)$، همدامنه $= \mathbb{R}$.

۴.۴.۵ مفهوم ۴: تابع

تعریف: تابع f از A به B، رابطه‌ای است که به هر عضو A، دقیقاً یک عضو B نسبت می‌دهد:

$$f : A \to B, \quad \forall x \in A,\ \exists! y \in B : y = f(x)$$

شهود: تابع مثل یک ماشین است: ورودی بده، خروجی بگیر. هر ورودی دقیقاً یک خروجی.
آزمون خط عمودی: اگر نمودار یک رابطه را رسم کنی و هیچ خط عمودی بیش از یک بار آن را قطع نکند، آن رابطه تابع است.
مثال ساده: $f(x) = 2x + 1$ یک تابع است. $x^2 + y^2 = 1$ یک تابع نیست (چون برای $x = 0$، دو مقدار $y = 1$ و $y = -1$).
مثال مدیریتی: تابع تقاضا $Q(P) = 1000 - 20P$ یک تابع است: به ازای هر قیمت P، دقیقاً یک مقدار تقاضا Q داریم.

۵.۴.۵ مفهوم ۵: توابع یک‌به‌یک (Injective)

تعریف: تابع f یک‌به‌یک است اگر:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

یا به‌طور معادل:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

شهود: در تابع یک‌به‌یک، هیچ دو ورودی مختلفی خروجی یکسان نمی‌دهند.
آزمون خط افقی: اگر هیچ خط افقی نمودار را بیش از یک بار قطع نکند، تابع یک‌به‌یک است.
مثال ساده: $f(x) = 2x + 1$ یک‌به‌یک است. $f(x) = x^2$ یک‌به‌یک نیست (چون $f(2) = f(-2) = 4$).
مثال مدیریتی: اگر تابع تقاضا یک‌به‌یک باشد، می‌توان قیمت را برحسب تقاضا بیان کرد: $P = f^{-1}(Q)$. اگر یک‌به‌یک نباشد، این کار ممکن نیست.

۶.۴.۵ مفهوم ۶: توابع پوشا (Surjective)

تعریف: تابع $f : A \to B$ پوشا است اگر:

$$\forall y \in B,\ \exists x \in A : f(x) = y$$

یعنی برد برابر همدامنه باشد: $\text{Range}(f) = B$.
شهود: در تابع پوشا، هر عضو همدامنه «هدف» قرار می‌گیرد.
مثال ساده: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با $f(x) = 2x + 1$ پوشا است. اما $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با $f(x) = x^2$ پوشا نیست (چون اعداد منفی در برد نیستند).
مثال مدیریتی: اگر تابع سود پوشا باشد، هر مقدار سود هدف قابل دستیابی است.

۷.۴.۵ مفهوم ۷: توابع دوسویه (Bijective) و معکوس

تعریف: تابعی که هم یک‌به‌یک و هم پوشا باشد، دوسویه نامیده می‌شود.
قضیه: تابع f معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر دوسویه باشد.
تابع معکوس:

$$f^{-1}: B \to A, \quad f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

خاصیت:

$$f(f^{-1}(x)) = x, \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

روش یافتن معکوس:

۱. $y = f(x)$ بنویس.

۲. x را برحسب y حل کن.

۳. x و y را جابه‌جا کن.

مثال ساده: $f(x) = 2x + 3$. معکوس:

$$y = 2x + 3 \tag{۲۴}$$
$$y - 3 = 2x \tag{۲۵}$$
$$x = \frac{y-3}{2} \tag{۲۶}$$
$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2} \tag{۲۷}$$

مثال مدیریتی: تابع تقاضا $Q(P) = 1000 - 20P$. معکوس (تابع قیمت):

$$Q = 1000 - 20P \tag{۲۸}$$
$$20P = 1000 - Q \tag{۲۹}$$
$$P = 50 - \frac{Q}{20} \tag{۳۰}$$

یعنی اگر بخواهیم Q واحد بفروشیم، قیمت باید $50 - Q/20$ باشد.

۸.۴.۵ مفهوم ۸: ترکیب توابع

تعریف:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

شهود: ابتدا g را اعمال کن، سپس f.
نکته: $(f \circ g) \neq (g \circ f)$ در حالت کلی.
مثال ساده: $f(x) = 2x + 1$، $g(x) = x^2$

$$(f \circ g)(x) = f(x^2) = 2x^2 + 1 \tag{۳۱}$$
$$(g \circ f)(x) = g(2x+1) = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 \tag{۳۲}$$

مثال مدیریتی: فرض کن $g(x)$ = تعداد محصول تولیدی برحسب تعداد کارگر x، و $f(y)$ = هزینه تولید برحسب تعداد محصول y. آنگاه $(f \circ g)(x)$ = هزینه برحسب تعداد کارگر.

۹.۴.۵ مفهوم ۹: توابع چندمتغیره

تعریف: تابعی که به چند ورودی، یک خروجی می‌دهد:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

مثال مدیریتی: تابع سود $P(x, y) = 10x + 15y - 2xy$ که x و y مقدار دو محصول هستند.
دامنه: مجموعه نقاطی که تابع در آن‌ها تعریف شده.

۱۰.۴.۵ مفهوم ۱۰: انواع تابع

نوع	فرمول	مثال مدیریتی
خطی	$f(x) = ax + b$	هزینه ثابت + متغیر
درجه دوم	$f(x) = ax^2 + bx + c$	سود کل
نمایی	$f(x) = a^x$	رشد سرمایه
لگاریتمی	$f(x) = \log_a x$	مطلوبیت
قدر مطلق	$f(x) = \lvert x \rvert$	فاصله از هدف
پله‌ای	$f(x) = \lfloor x \rfloor$	تعرفه پله‌ای

۵.۵ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: تشخیص تابع
صورت مسئله: کدام رابطه تابع است؟

- $R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
- $R_2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$
- $R_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

مرحله ۱: R_1: هر ورودی دقیقاً یک خروجی $\Rightarrow$ تابع.
مرحله ۲: R_2: ورودی ۱ دو خروجی دارد (۲ و ۳) $\Rightarrow$ تابع نیست.
مرحله ۳: R_3: هر ورودی دقیقاً یک خروجی $\Rightarrow$ تابع.
نتیجه: R_1 و R_3 تابع هستند؛ R_2 تابع نیست.

مثال حل‌شده

مثال ۲: دامنه و برد
صورت مسئله: دامنه و برد $f(x) = \sqrt{x - 2}$ را بیاب.
مرحله ۱: زیر رادیکال باید ≥ 0: $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$.
مرحله ۲: دامنه $= [2, +\infty)$.
مرحله ۳: خروجی رادیکال همیشه ≥ 0.
مرحله ۴: برد $= [0, +\infty)$.
نتیجه: دامنه $[2, +\infty)$، برد $[0, +\infty)$.

مثال حل‌شده

مثال ۳: تابع تقاضا

صورت مسئله: تابع تقاضای یک محصول $Q(P) = 500 - 10P$. دامنه و برد را در محدوده اقتصادی بیاب.

مرحله ۱: قیمت منفی معنی ندارد: $P \geq 0$.

مرحله ۲: تقاضا منفی معنی ندارد: $500 - 10P \geq 0 \Rightarrow P \leq 50$.

مرحله ۳: دامنه اقتصادی $= [0, 50]$.

مرحله ۴: برد $= [0, 500]$.

نتیجه: دامنه $[0, 50]$، برد $[0, 500]$.

مثال حل‌شده

مثال ۴: تابع سود

صورت مسئله: تابع درآمد $R(q) = 20q$ و هزینه $C(q) = 100 + 5q$. تابع سود را بیاب و سود در $q = 20$ را حساب کن.

مرحله ۱: سود $=$ درآمد $-$ هزینه.

مرحله ۲: $P(q) = 20q - (100 + 5q) = 15q - 100$.

مرحله ۳: $P(20) = 15(20) - 100 = 300 - 100 = 200$.

نتیجه: $P(q) = 15q - 100$؛ سود در ۲۰ واحد $= 200$.

مثال حل‌شده

مثال ۵: ترکیب توابع

صورت مسئله: $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x^2$. $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ را بیاب.

مرحله ۱: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1$.

مرحله ۲: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$.

نتیجه: ترکیب توابع جابه‌جایی‌پذیر نیست.

مثال حل‌شده

مثال ۶: کاربرد در تولید

صورت مسئله: در یک کارخانه، تابع تولید $Q(L) = 10\sqrt{L}$ که L تعداد کارگر است. اگر ۲۵ کارگر داشته باشیم، تولید چقدر است؟ اگر بخواهیم ۱۰۰ واحد تولید کنیم، چند کارگر لازم است؟

مرحله ۱: $Q(25) = 10\sqrt{25} = 10 \times 5 = 50$.

مرحله ۲: $100 = 10\sqrt{L} \Rightarrow \sqrt{L} = 10 \Rightarrow L = 100$.

نتیجه: با ۲۵ کارگر، ۵۰ واحد؛ برای ۱۰۰ واحد، ۱۰۰ کارگر لازم است.

مثال حل‌شده

مثال ۷: یافتن تابع معکوس
صورت مسئله: $f(x) = 3x - 6$. تابع معکوس را بیاب و $f^{-1}(9)$ را حساب کن.
مرحله ۱: $y = 3x - 6$.
مرحله ۲: $y + 6 = 3x \Rightarrow x = \frac{y+6}{3}$.
مرحله ۳: $f^{-1}(x) = \frac{x+6}{3}$.
مرحله ۴: $f^{-1}(9) = \frac{9+6}{3} = \frac{15}{3} = 5$.
بررسی: $f(5) = 3(5) - 6 = 15 - 6 = 9$. ✓
نتیجه: $f^{-1}(x) = \frac{x+6}{3}$؛ $f^{-1}(9) = 5$.

مثال حل‌شده

مثال ۸: تشخیص یک‌به‌یک
صورت مسئله: آیا $f(x) = x^2$ روی دامنه $[0, +\infty)$ یک‌به‌یک است؟
مرحله ۱: فرض کن $f(x_1) = f(x_2)$: $x_1^2 = x_2^2$.
مرحله ۲: روی $[0, +\infty)$، جذر مثبت است: $x_1 = x_2$.
مرحله ۳: پس یک‌به‌یک است.
نکته: اما روی $\mathbb{R}$، یک‌به‌یک نیست (چون $f(-2) = f(2)$).
نتیجه: بله، روی $[0, +\infty)$ یک‌به‌یک است.

مثال حل‌شده

مثال ۹: تابع هزینه پله‌ای
صورت مسئله: یک شرکت اینترنتی هزینه اشتراک ماهانه را به‌صورت پله‌ای محاسبه می‌کند: تا ۵۰ گیگ، ۱۰۰ هزار تومان؛ بیش از ۵۰ گیگ، به ازای هر گیگ اضافه ۳ هزار تومان. تابع هزینه را بنویس و هزینه ۷۰ گیگ را حساب کن.
مرحله ۱: تعریف تابع:

$$C(x) = \begin{cases} 100 & 0 \le x \le 50 \\ 100 + 3(x - 50) & x > 50 \end{cases}$$

مرحله ۲: $C(70) = 100 + 3(70 - 50) = 100 + 60 = 160$.
نتیجه: هزینه ۷۰ گیگ، ۱۶۰ هزار تومان است.

مثال حل‌شده

مثال ۱۰: مدل‌سازی با تابع چندمتغیره
صورت مسئله: یک شرکت دو محصول تولید می‌کند. تابع درآمد $R(x, y) = 20x + 30y$ و تابع هزینه $C(x, y) = 100 + 5x + 8y + 0.1xy$. تابع سود را بیاب و سود در $x = 10$، $y = 15$ را حساب کن.
مرحله ۱: $P(x, y) = R(x, y) - C(x, y)$.
مرحله ۲: $P(x, y) = 20x + 30y - 100 - 5x - 8y - 0.1xy$.
مرحله ۳: $P(x, y) = 15x + 22y - 0.1xy - 100$.
مرحله ۴: $P(10, 15) = 15(10) + 22(15) - 0.1(10)(15) - 100 = 150 + 330 - 15 - 100 = 365$.
نتیجه: سود در $x = 10$ و $y = 15$ برابر ۳۶۵ است.

۶.۵ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه ۱: اشتباه بین دامنه و برد.
راه پیشگیری: دامنه = ورودی، برد = خروجی.
اشتباه ۲: فرض تابع بودن هر رابطه.
راه پیشگیری: آزمون خط عمودی را فراموش نکن.
اشتباه ۳: فراموش کردن محدودیت‌های اقتصادی در دامنه.
راه پیشگیری: قیمت و مقدار منفی معنی ندارند.
اشتباه ۴: فرض $(f \circ g) = (g \circ f)$.
راه پیشگیری: ترکیب توابع جابه‌جایی‌پذیر نیست.
اشتباه ۵: فرض معکوس‌پذیری هر تابع.
راه پیشگیری: ابتدا یک‌به‌یک بودن را بررسی کن.
اشتباه ۶: اشتباه در محاسبه دامنه توابع رادیکالی یا کسری.
راه پیشگیری: زیر رادیکال ≥ 0 و مخرج $\neq 0$.

۷.۵ کاربرد در مدیریت

مثال واقعی ۱: اسنپ برای محاسبه هزینه سفر از تابع $C(d) = 5000 + 3000d$ استفاده می‌کند که d مسافت (کیلومتر) است. این یک تابع خطی است.

مثال واقعی ۲: ایرانسل برای محاسبه قبض مشتریان از تابع پله‌ای استفاده می‌کند: تا ۱۰ گیگ، مبلغ ثابت؛ بیش از آن، به ازای هر گیگ اضافه.

مثال واقعی ۳: دیجی‌کالا برای پیش‌بینی فروش از تابع تقاضا استفاده می‌کند: $Q(P) = 10000 - 50P$. با این تابع، مدیر می‌تواند قیمت بهینه را پیدا کند.

مثال واقعی ۴: بانک ملت برای محاسبه سود سپرده از تابع نمایی استفاده می‌کند: $A(t) = P(1+r)^t$.

۸.۵ خلاصه فصل

مفهوم	تعریف
زوج مرتب	(a, b) با ترتیب مشخص
رابطه	زیرمجموعه $A \times B$
تابع	هر ورودی دقیقاً یک خروجی
دامنه	مجموعه ورودی‌های مجاز
برد	مجموعه خروجی‌های واقعی
یک‌به‌یک	$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
پوشا	$\text{Range} = \text{Codomain}$
دوسویه	یک‌به‌یک و پوشا
معکوس	$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$
ترکیب	$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

۹.۵ خودآزمایی

۱.۹.۵ چهارگزینه‌ای (۱۲ سوال)

۱. کدام رابطه تابع است؟

آ) $\{(1,2),(1,3)\}$

ب) $\{(1,2),(2,2),(3,2)\}$

ج) $\{(1,2),(2,3),(2,4)\}$

د) $\{(1,1),(1,2),(1,3)\}$

۲. دامنه $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ کدام است؟

آ) $\mathbb{R}$

ب) $\mathbb{R}-\{3\}$

ج) $[3,+\infty)$

د) $(-\infty,3]$

۳. اگر $f(x)=3x-2$، آنگاه $f(4)$ چند است؟

آ) ۱۰

ب) ۱۲

ج) ۱۴

د) ۱۶

۴. برد $f(x)=x^2+1$ کدام است؟

آ) $\mathbb{R}$

ب) $[0,+\infty)$

ج) $[1,+\infty)$

د) $(-\infty,1]$

۵. اگر $f(x)=x+1$ و $g(x)=2x$، آنگاه $(f\circ g)(3)$ چند است؟

آ) ۶

ب) ۷

ج) ۸

د) ۹

۶. کدام تابع یک‌به‌یک است؟

آ) $f(x)=x^2$

ب) $f(x) = |x|$

ج) $f(x) = 2x + 1$

د) $f(x) = x^4$

۷. معکوس $f(x) = 5x - 10$ کدام است؟

آ) $\frac{x+10}{5}$

ب) $\frac{x-10}{5}$

ج) $5x + 10$

د) $\frac{5}{x-10}$

۸. اگر $|A| = 3$ و $|B| = 4$، آنگاه $|A \times B|$ چند است؟

آ) ۷

ب) ۱۲

ج) ۳۴

د) ۴۳

۹. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با $f(x) = x^2$ پوشا است؟

آ) بله

ب) خیر

ج) فقط برای اعداد مثبت

د) فقط برای اعداد منفی

۱۰. کدام رابطه هم‌ارزی است؟

آ) $<$

ب) $\leq$

ج) $=$

د) $\neq$

۱۱. اگر $f(x) = \sqrt{x}$، دامنه کدام است؟

آ) $\mathbb{R}$

ب) $[0, +\infty)$

ج) $(-\infty, 0]$

د) $(0, +\infty)$

۱۲. اگر $f(x) = 2x$ و $g(x) = x + 3$، $(g \circ f)(2)$ چند است؟

آ) ۵

ب) ۷

ج) ۹

د) ۱۱

۲.۹.۵ تشریحی (۵ سوال)

۱۳. دامنه و برد $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ را بیاب.
۱۴. تابع سود $P(q) = -2q^2 + 40q - 100$. سود در $q = 10$ چقدر است؟
۱۵. اگر $f(x) = 2x$ و $g(x) = x^2 + 1$، $(g \circ f)(2)$ را حساب کن.
۱۶. معکوس $f(x) = \frac{2x+1}{3}$ را بیاب.
۱۷. ثابت کن $f(x) = 3x + 2$ یک‌به‌یک است.

۱۰.۵ پاسخنامه تشریحی

۱. ب) فقط گزینه ب هر ورودی را به یک خروجی می‌نگارد.
۲. ب) مخرج نباید صفر شود: $x \neq 3$.
۳. الف) $f(4) = 3(4) - 2 = 10$.
۴. ج) $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1$.
۵. ب) $g(3) = 6$، $f(6) = 7$.
۶. ج) فقط تابع خطی یک‌به‌یک است.
۷. الف) $y = 5x - 10 \Rightarrow x = \frac{y+10}{5}$.
۸. ب) $3 \times 4 = 12$.
۹. ب) خیر، چون اعداد منفی در برد نیستند.
۱۰. ج) رابطه = بازتابی، تقارنی و تعدی است.
۱۱. ب) زیر رادیکال ≥ 0.
۱۲. ب) $f(2) = 4$، $g(4) = 7$.
۱۳. دامنه: $4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$. برد: $[0, 2]$.
۱۴. $P(10) = -2(100) + 40(10) - 100 = -200 + 400 - 100 = 100$.
۱۵. $f(2) = 4$، $g(4) = 16 + 1 = 17$.
۱۶. $y = \frac{2x+1}{3} \Rightarrow 3y = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{3y-1}{2}$. پس $f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2}$.
۱۷. فرض $f(x_1) = f(x_2)$: $3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. پس یک‌به‌یک است.

۱۱.۵ منابع پیشنهادی

- پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. فصل ۲.
- رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. فصل ۲.
- T. S. Tan، (۲۰۱۹). *Applied Mathematics for Managerial، Social and Life Sci-ences*. Ch. Cengage. ۲.
- A. S. Salzman، (۲۰۱۷). *Mathematics for Business*. Ch. McGraw-Hill. ۲.

ایست بازرسی

پایان فصل ۲ — نسخه توسعه‌یافته
آمار: ∼۱۶ صفحه A۴ | ۱۰ مثال حل‌شده | ۱۷ سوال | ۴ منبع

۶ فصل ۳: توابع خطی و درجه دوم

۱.۶ چکیده

توابع خطی و درجه دوم، پرکاربردترین توابع در مدیریت هستند. تابع خطی، مدل ساده‌ای برای هزینه، درآمد و تقاضا فراهم می‌کند. تابع درجه دوم، برای مدل‌سازی سود، بهینه‌سازی و مسائل ماکسیمم/مینیمم به کار می‌رود. در این فصل، شیب، عرض از مبدأ، اشکال مختلف معادله خط، سهمی، رأس، ریشه‌ها، و کاربردهای گسترده مدیریتی را می‌آموزی. هدف: بتوانی مسائل نقطه سربه‌سر، حداکثر سود، و حداقل هزینه را حل کنی.

۲.۶ اهداف یادگیری

- **تعریف کند:** تابع خطی، شیب، عرض از مبدأ، تابع درجه دوم، سهمی، رأس.
- **محاسبه کند:** شیب از دو نقطه، معادله خط، رأس سهمی، ریشه‌های معادله درجه دوم.
- **تحلیل کند:** رفتار تابع خطی و درجه دوم در محدوده اقتصادی.
- **حل کند:** مسائل نقطه سربه‌سر، حداکثر سود، حداقل هزینه.
- **مدل‌سازی کند:** یک مسئله مدیریتی را با تابع خطی یا درجه دوم بیان کند.

۳.۶ مقدمه طنز

تصور کن یک مدیر کارخانه می‌خواهد بداند «اگر ۱۰۰ واحد تولید کنم، چقدر سود می‌کنم؟ اگر ۲۰۰ واحد تولید کنم، چقدر؟» اگر بلد نباشد تابع سود را بنویسد، مجبور است برای هر مقدار تولید، یک آزمایش جداگانه انجام دهد — کاری که هم پرهزینه است هم زمان‌بر.

توابع خطی و درجه دوم، دو ابزار ساده اما قدرتمند هستند. تابع خطی مثل «چاقوی آشپزخانه» است: ساده، همه‌کاره، و همیشه به کار می‌آید. تابع درجه دوم مثل «چاقوی سرآشپز» است: تخصصی‌تر، اما برای کارهای ظریف (مثل بهینه‌سازی) بی‌رقیب.

نکته طنزآمیز اینجاست: بسیاری از مدیران فکر می‌کنند «سود همیشه با افزایش تولید زیاد می‌شود». اما تابع سود درجه دوم (سهمی) به ما می‌گوید سود تا یک نقطه خاص زیاد می‌شود، بعد کم می‌شود. این نقطه، همان «رأس سهمی» است — و اگر مدیر آن را نداند، ممکن است با تولید بیش از حد، ضرر کند. پس این فصل، تو را از «تفکر خطی» به «تفکر غیرخطی» می‌برد.

۴.۶ مفاهیم اصلی

۱.۴.۶ مفهوم ۱: تابع خطی

تعریف: تابع خطی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = ax + b$$

که a شیب و b عرض از مبدأ است.

شهود: تابع خطی، یک خط راست است. شیب، میزان «تندی» خط را نشان می‌دهد.

فرمول شیب:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

تفسیر شیب در مدیریت: شیب، «نرخ تغییر» است. مثلاً اگر تابع هزینه $C(q) = 5q + 100$، شیب ۵ یعنی «به ازای هر واحد اضافه تولید، هزینه ۵ واحد افزایش می‌یابد».

اشکال مختلف معادله خط:

۱. **فرم شیب‌ـ‌عرض:** $y = ax + b$

۲. **فرم نقطه‌ـ‌شیب:** $y - y_1 = a(x - x_1)$

۳. **فرم دو نقطه‌ای:** $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

۴. **فرم استاندارد:** $Ax + By = C$

مثال ساده: $f(x) = 2x + 3$. شیب $= 2$، عرض از مبدأ $= 3$.
مثال مدیریتی: تابع هزینه $C(q) = 5q + 100$. هزینه ثابت $= 100$، هزینه متغیر هر واحد $= 5$.

۲.۴.۶ مفهوم ۲: یافتن معادله خط

روش ۱: با شیب و یک نقطه

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

روش ۲: با دو نقطه

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad y - y_1 = a(x - x_1)$$

مثال عددی: خطی که از $(1, 2)$ و $(3, 8)$ می‌گذرد:

$$a = \frac{8 - 2}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y - 2 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 1$$

مثال مدیریتی: فرض کن هزینه تولید ۱۰ واحد، ۲۰۰ هزار تومان و هزینه تولید ۲۰ واحد، ۳۰۰ هزار تومان است. تابع هزینه خطی را بیاب.

$$a = \frac{300 - 200}{20 - 10} = \frac{100}{10} = 10$$

$$C - 200 = 10(q - 10) \Rightarrow C = 10q + 100$$

هزینه ثابت $= 100$، هزینه متغیر هر واحد $= 10$.

۳.۴.۶ مفهوم ۳: تابع درجه دوم

تعریف: تابع درجه دوم به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

شهود: نمودار تابع درجه دوم، یک «سهمی» (Parabola) است. اگر $a > 0$، سهمی رو به بالا باز می‌شود (مینیمم دارد). اگر $a < 0$، رو به پایین باز می‌شود (ماکسیمم دارد).
رأس سهمی:

$$x_v = -\frac{b}{2a}, \quad y_v = f(x_v) = c - \frac{b^2}{4a}$$

محور تقارن: خط عمودی $x = -\frac{b}{2a}$.
ریشه‌ها (صفرهای تابع):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مبیّن (Discriminant): $\Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta > 0$: دو ریشه حقیقی متمایز.
- $\Delta = 0$: یک ریشه مضاعف.
- $\Delta < 0$: بدون ریشه حقیقی.

مثال ساده: $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

- $a = 1 > 0$: رو به بالا.
- $x_v = -\frac{-4}{2(1)} = 2$.
- $y_v = f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$.
- ریشه‌ها: $x = 1$ و $x = 3$.

مثال مدیریتی: تابع سود $P(q) = -2q^2 + 40q - 100$.

- $a = -2 < 0$: رو به پایین، ماکسیمم دارد.
- $q_v = -\frac{40}{2(-2)} = 10$.
- $P(10) = -200 + 400 - 100 = 100$.
- حداکثر سود $= 100$ در $q = 10$.

۴.۴.۶ مفهوم ۴: نقطه سربه‌سر (Break-Even Point)

تعریف: نقطه‌ای که درآمد برابر هزینه است:

$$R(q) = C(q)$$

مثال مدیریتی: $R(q) = 20q$، $C(q) = 10q + 200$.

$$20q = 10q + 200 \Rightarrow 10q = 200 \Rightarrow q = 20$$

نقطه سربه‌سر: ۲۰ واحد.

۵.۴.۶ مفهوم ۵: بهینه‌سازی با تابع درجه دوم

قضیه: تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- اگر $a > 0$: مینیمم در $x = -\frac{b}{2a}$.
- اگر $a < 0$: ماکسیمم در $x = -\frac{b}{2a}$.

مثال مدیریتی: یک شرکت می‌خواهد سود را ماکسیمم کند:

$$P(q) = -3q^2 + 60q - 150$$

$$q^* = -\frac{60}{2(-3)} = 10$$

$$P(10) = -300 + 600 - 150 = 150$$

حداکثر سود: ۱۵۰ در تولید ۱۰ واحد.

۵.۶ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: یافتن معادله خط
صورت مسئله: خطی که از $(2,5)$ و $(4,11)$ می‌گذرد را بیاب.
مرحله ۱: $a = \frac{11-5}{4-2} = \frac{6}{2} = 3$.
مرحله ۲: $y - 5 = 3(x-2)$.
مرحله ۳: $y = 3x - 1$.
نتیجه: $y = 3x - 1$.

مثال حل‌شده

مثال ۲: تابع هزینه خطی
صورت مسئله: هزینه تولید ۵۰ واحد، ۷۰۰ هزار تومان و هزینه تولید ۱۰۰ واحد، ۱۲۰۰ هزار تومان است. تابع هزینه خطی را بیاب و هزینه ثابت را تعیین کن.
مرحله ۱: $a = \frac{1200-700}{100-50} = \frac{500}{50} = 10$.
مرحله ۲: $C - 700 = 10(q-50)$.
مرحله ۳: $C = 10q + 200$.
نتیجه: هزینه ثابت 200 = هزار تومان.

مثال حل‌شده

مثال ۳: رأس سهمی
صورت مسئله: $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$. رأس را بیاب.
مرحله ۱: $x_v = -\frac{-8}{2(2)} = 2$.
مرحله ۲: $y_v = f(2) = 2(4) - 8(2) + 5 = 8 - 16 + 5 = -3$.
نتیجه: رأس $=: (2,-3)$؛ مینیمم.

مثال حل‌شده

مثال ۴: نقطه سربه‌سر
صورت مسئله: $R(q) = 30q$، $C(q) = 15q + 300$. نقطه سربه‌سر را بیاب.
مرحله ۱: $30q = 15q + 300$.
مرحله ۲: $15q = 300 \Rightarrow q = 20$.
مرحله ۳: $R(20) = 600$.
نتیجه: نقطه سربه‌سر در ۲۰ واحد و ۶۰۰ هزار تومان.

مثال حل‌شده

مثال ۵: حداکثر سود
صورت مسئله: $P(q) = -q^2 + 20q - 50$. حداکثر سود را بیاب.
مرحله ۱: $q^* = -\frac{20}{2(-1)} = 10$.
مرحله ۲: $P(10) = -100 + 200 - 50 = 50$.
نتیجه: حداکثر سود 50 = در $q = 10$.

مثال حل‌شده

مثال ۶: حداقل هزینه
صورت مسئله: $C(q) = q^2 - 10q + 50$. حداقل هزینه را بیاب.
مرحله ۱: $q^* = -\frac{-10}{2(1)} = 5$.
مرحله ۲: $C(5) = 25 - 50 + 50 = 25$.
نتیجه: حداقل هزینه $25 =$ در $q = 5$.

مثال حل‌شده

مثال ۷: ریشه‌های معادله درجه دوم
صورت مسئله: $x^2 - 5x + 6 = 0$. ریشه‌ها را بیاب.
مرحله ۱: $\Delta = 25 - 24 = 1$.
مرحله ۲: $x = \frac{5 \pm 1}{2}$.
مرحله ۳: $x_1 = 3$، $x_2 = 2$.
نتیجه: ریشه‌ها ۲ و ۳.

مثال حل‌شده

مثال ۸: کاربرد در تقاضا
صورت مسئله: تابع تقاضا $Q(P) = 100 - 2P$. تابع درآمد را بیاب و حداکثر درآمد را حساب کن.
مرحله ۱: $R(P) = P \cdot Q = P(100 - 2P) = 100P - 2P^2$.
مرحله ۲: $P^* = -\frac{100}{2(-2)} = 25$.
مرحله ۳: $R(25) = 2500 - 1250 = 1250$.
نتیجه: حداکثر درآمد $1250 =$ در قیمت ۲۵.

۶.۶ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه ۱: اشتباه در علامت شیب.
راه پیشگیری: شیب مثبت = صعودی، منفی = نزولی.
اشتباه ۲: فراموش کردن شرط $a \neq 0$ در تابع درجه دوم.
راه پیشگیری: اگر $a = 0$، تابع خطی است.
اشتباه ۳: اشتباه در محاسبه رأس.
راه پیشگیری: فرمول $x_v = -\frac{b}{2a}$ را حفظ کن.
اشتباه ۴: فراموش کردن بررسی جهت سهمی.
راه پیشگیری: $a > 0$ مینیمم، $a < 0$ ماکسیمم.
اشتباه ۵: اشتباه در علامت مبیّن.
راه پیشگیری: $\Delta = b^2 - 4ac$.

۷.۶ کاربرد در مدیریت

مثال واقعی ۱: شرکت ایران‌خودرو برای محاسبه هزینه تولید هر خودرو از تابع خطی $C(q) = 500q + 10000000$ استفاده می‌کند.

مثال واقعی ۲: فروشگاه دیجی‌کالا برای بهینه‌سازی سود از تابع درجه دوم $P(q) = -2q^2 + 100q - 500$ استفاده می‌کند.

مثال واقعی ۳: بانک مرکزی برای تحلیل تقاضای پول از تابع درجه دوم استفاده می‌کند.

۸.۶ خلاصه فصل

مفهوم	فرمول	کاربرد
تابع خطی	$f(x) = ax + b$	هزینه، درآمد
شیب	$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$	نرخ تغییر
تابع درجه دوم	$f(x) = ax^2 + bx + c$	سود، بهینه‌سازی
رأس	$x_v = -\frac{b}{2a}$	ماکسیمم/مینیمم
ریشه	$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	نقطه سربه‌سر
مبیّن	$\Delta = b^2 - 4ac$	تعداد ریشه‌ها

۹.۶ خودآزمایی

۱.۹.۶ چهارگزینه‌ای (۸ سوال)

۱. شیب خطی که از $(1, 3)$ و $(3, 7)$ می‌گذرد:

آ) ۱

ب) ۲

ج) ۳

د) ۴

۲. رأس $f(x) = x^2 - 6x + 5$:

آ) $(3, -4)$

ب) $(3, 4)$

ج) $(-3, -4)$

د) $(6, 5)$

۳. اگر $a > 0$، سهمی:

آ) ماکسیمم دارد

ب) مینیمم دارد

ج) نه ماکسیمم نه مینیمم

د) بستگی دارد

۴. ریشه‌های $x^2 - 7x + 12 = 0$:

آ) ۳ و ۴

ب) ۲ و ۶

ج) ۱ و ۱۲

د) ۵ و ۲

۵. نقطه سربه‌سر $R = 20q$، $C = 10q + 100$:

آ) ۵

ب) ۱۰

ج) ۱۵

د) ۲۰

۶. حداکثر $f(x) = -x^2 + 4x + 1$:

آ) ۳

ب) ۴

ج) ۵

د) ۶

۷. اگر $\Delta < 0$، معادله:

آ) دو ریشه دارد

ب) یک ریشه دارد

ج) بدون ریشه حقیقی است

د) بی‌شمار ریشه دارد

۸. تابع $f(x) = 3x - 5$ در $x = 4$:

آ) ۵

ب) ۷

ج) ۹

د) ۱۱

۲.۹.۶ تشریحی (۴ سوال)

۹. تابع هزینه خطی را بیاب که هزینه ۱۰ واحد ۲۰۰ و هزینه ۲۰ واحد ۳۰۰ باشد.

۱۰. رأس و ریشه‌های $f(x) = x^2 - 4x + 3$ را بیاب.

۱۱. $P(q) = -2q^2 + 40q - 100$. حداکثر سود را بیاب.

۱۲. نقطه سربه‌سر $R(q) = 50q$، $C(q) = 30q + 400$ را بیاب.

۱۰.۶ پاسخنامه تشریحی

۱. ب) $a = \frac{7-3}{3-1} = 2$.
۲. الف) $x_v = 3$، $y_v = 9 - 18 + 5 = -4$.
۳. ب) $a > 0$ یعنی رو به بالا، مینیمم.
۴. الف) $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$.
۵. ب) $20q = 10q + 100 \Rightarrow q = 10$.
۶. ج) $x^* = 2$، $f(2) = -4 + 8 + 1 = 5$.
۷. ج) بدون ریشه حقیقی.
۸. ب) $f(4) = 12 - 5 = 7$.
۹. $a = 10$، $C = 10q + 100$.
۱۰. رأس: $(2, -1)$؛ ریشه‌ها: ۱ و ۳.
۱۱. $q^* = 10$، $P(10) = 100$.
۱۲. $50q = 30q + 400 \Rightarrow q = 20$.

۱۱.۶ منابع پیشنهادی

- پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. فصل ۳.
- رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. فصل ۳.
- T. S. Tan، (۲۰۱۹). *Applied Mathematics for the Managerial، Social and Life Sci-ences*. Ch. ۳.
- E. Ummer، (۲۰۱۸). *Basic Mathematics for Business Economics، Finance and Rout-ledge*. Ch. ۳.

ایست بازرسی

پایان فصل ۳
آمار: ∼۱۲ صفحه A۴ | ۸ مثال حل‌شده | ۱۲ سوال | ۴ منبع
سوال: ادامه دهم به فصل ۴ (توابع نمایی و لگاریتمی) یا بازبینی کنم؟

xcolor enumitem booktabs geometry amsmath،amssymb،amsthm [۱۲pt،a۴paper]article
xepersian hyperref tcolorbox
margin=۲.۵cm
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)
فصل ۴: توابع نمایی و لگاریتمی (نسخه توسعه‌یافته) تیم ۵ نفره معمار آموزشی ۱۳ مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۷ فصل ۴: توابع نمایی و لگاریتمی (نسخه توسعه‌یافته – حجم دوبرابر)

۱.۷ چکیده

توابع نمایی و لگاریتمی، ستون فقرات مدل‌سازی مالی و اقتصادی هستند. تابع نمایی، رشد و زوال را مدل می‌کند — از بهره مرکب تا رشد جمعیت و استهلاک دارایی. تابع لگاریتمی، معکوس تابع نمایی است و برای حل معادلات نمایی، محاسبه زمان رسیدن به هدف، و مدل‌سازی مطلوبیت به کار می‌رود. در این فصل، تعریف دقیق، خواص، قوانین، نمودار، تبدیلات، معادلات، نامعادلات، و کاربردهای گسترده مدیریتی این دو تابع را می‌آموزی. هدف نهایی: بتوانی هر پدیده مالی–اقتصادی را با تابع نمایی یا لگاریتمی مدل کنی و پارامترهایش را در بستر مدیریت تفسیر کنی.

۲.۷ اهداف یادگیری

- **تعریف کند:** تابع نمایی، پایه، نرخ رشد، تابع لگاریتمی، لگاریتم طبیعی، لگاریتم متعارف، عدد نپر.
- **محاسبه کند:** مقادیر توابع نمایی و لگاریتمی، معادلات نمایی، معادلات لگاریتمی، نامعادلات.
- **تحلیل کند:** رفتار توابع نمایی و لگاریتمی، مجانب، دامنه و برد، تبدیلات نموداری.
- **به‌کار برد:** قوانین لگاریتم برای ساده‌سازی عبارات و حل معادلات.
- **مدل‌سازی کند:** بهره مرکب، رشد جمعیت، استهلاک، ارزش فعلی، زمان دوبرابر شدن سرمایه.
- **ارزیابی کند:** کدام مدل (نمایی یا خطی) برای یک پدیده مالی مناسب‌تر است.

۳.۷ مقدمه طنز

تصور کن یک مدیر سرمایه‌گذاری می‌خواهد بداند «اگر ۱۰۰ میلیون تومان با نرخ ٪۲۰ سالانه سرمایه‌گذاری کنم، بعد از ۱۰ سال چقدر می‌شود؟» اگر بلد نباشد از تابع نمایی استفاده کند، ممکن است ساده‌لوحانه حساب کند: $100 \times (1 + 0.2 \times 10) = 300$ میلیون. اما واقعیت این است که بهره مرکب، عدد را به حدود ۶۱۹ میلیون می‌رساند! این تفاوت ۳۱۹ میلیونی، همان «معجزه نمایی» است که بسیاری از مدیران از آن غافل‌اند.

توابع نمایی مثل «بمب سود مرکب» هستند: در سال‌های اول، اثرشان کم است و کسی متوجه نمی‌شود؛ اما در سال‌های بعد، انفجاری می‌شوند. تابع لگاریتمی، برعکس، مثل «ترمز» است: وقتی می‌خواهی بدانی «چند سال طول می‌کشد تا سرمایه‌ام دو برابر شود؟» یا «چند درصد رشد لازم است تا به هدف برسم؟»، لگاریتم به کمک می‌آید.

نکته طنزآمیز ماجرا اینجاست: بسیاری از افراد فکر می‌کنند «سود ٪۲۰ سالانه» یعنی هر سال ۲۰ واحد به ۱۰۰ واحد اضافه می‌شود. اما در دنیای واقعی، سود روی سود می‌نشیند و این یعنی رشد نمایی. اگر مدیر این را نداند، ممکن است در پیش‌بینی‌های مالی، فاجعه‌بار اشتباه کند — و این دقیقاً همان چیزی است که این فصل می‌خواهد از آن جلوگیری کند.

۴.۷ مفاهیم اصلی

۱.۴.۷ مفهوم ۱: تابع نمایی – تعریف و شهود

تعریف: تابع نمایی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = a^x, \quad a > 0,\ a \neq 1$$

که a را «پایه» (Base) و x را «نما» (Exponent) می‌نامیم.

شهود: تابع نمایی یعنی «رشد مضاعف». به جای اینکه هر بار یک مقدار ثابت اضافه شود (مثل تابع خطی)، هر بار مقدار قبلی در یک عدد ثابت ضرب می‌شود.

تفاوت بنیادین خطی و نمایی:

- **خطی:** $f(x) = 2x \Rightarrow$ هر بار ۲ واحد اضافه می‌شود.
- **نمایی:** $f(x) = 2^x \Rightarrow$ هر بار مقدار دو برابر می‌شود.

جدول مقایسه عددی:

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۱۰
$2x$	۰	۲	۴	۶	۸	۱۰	۲۰
2^x	۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۱۰۲۴

همان‌طور که می‌بینی، در $x = 10$، تابع خطی فقط ۲۰ است اما تابع نمایی ۱۰۲۴! این همان «انفجار نمایی» است.

انواع تابع نمایی:

۱. **رشد نمایی (Exponential Growth):** $a > 1 \Rightarrow$ تابع صعودی.

۲. **زوال نمایی (Exponential Decay):** $0 < a < 1 \Rightarrow$ تابع نزولی.

مثال ساده رشد: $f(x) = 2^x$. $f(0) = 1$، $f(1) = 2$، $f(2) = 4$، $f(3) = 8$، $f(10) = 1024$.

مثال ساده زوال: $f(x) = (0.5)^x$. $f(0) = 1$، $f(1) = 0.5$، $f(2) = 0.25$، $f(10) \approx 0.00098$.

مثال مدیریتی: فرض کن جمعیت یک شهر با نرخ ٪۳ سالانه رشد می‌کند. اگر جمعیت فعلی ۱۰۰،۰۰۰ نفر باشد، جمعیت بعد از t سال:

$$P(t) = 100{,}000 \times (1.03)^t$$

بعد از ۱۰ سال: $P(10) = 100{,}000 \times (1.03)^{10} \approx 134{,}392$ نفر. بعد از ۳۰ سال: $P(30) = 100{,}000 \times (1.03)^{30} \approx 242{,}726$ نفر.

۲.۴.۷ مفهوم ۲: عدد نپر و تابع نمایی طبیعی

تعریف: عدد نپر (Euler's number) یک ثابت ریاضی است:

$$e \approx 2.718281828459045\ldots$$

شهود: عدد e از حد زیر به دست می‌آید:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

این عدد، پایه طبیعی رشد پیوسته است. اگر بهره به‌صورت پیوسته (نه سالانه، نه ماهانه) مرکب شود، از e استفاده می‌کنیم.

تابع نمایی طبیعی:

$$f(x) = e^x$$

خواص مهم:

- $e^0 = 1$
- $e^1 = e \approx 2.718$
- $e^x > 0$ برای همه x
- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ (مجانب افقی)
- $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

مثال عددی: $e^2 \approx 7.389$، $e^{-1} \approx 0.368$، $e^{0.5} \approx 1.649$.

مثال مدیریتی: اگر ۱۰۰ میلیون تومان با نرخ ٪۲۰ به‌صورت پیوسته مرکب شود، بعد از ۱۰ سال:

$$A = 100 \times e^{0.2\times10} = 100 \times e^2 \approx 738.9 \text{ میلیون تومان}$$

۳.۴.۷ مفهوم ۳: تابع لگاریتمی – تعریف و شهود

تعریف: تابع لگاریتمی، معکوس تابع نمایی است:

$$y = \log_a x \iff a^y = x$$

که $a > 0$، $a \neq 1$، و $x > 0$.
شهود: لگاریتم به این سوال پاسخ می‌دهد: «چند بار باید پایه a را در خودش ضرب کنم تا به x برسم؟»
مثال ساده: $\log_2 8 = 3$ چون $2^3 = 8$.
انواع لگاریتم:

۱. **لگاریتم متعارف (Common Logarithm):** $\log_{10} x$ که به‌صورت $\log x$ نوشته می‌شود.

۲. **لگاریتم طبیعی (Natural Logarithm):** $\log_e x$ که به‌صورت $\ln x$ نوشته می‌شود.

۳. **لگاریتم دودویی (Binary Logarithm):** $\log_2 x$ که در علوم کامپیوتر کاربرد دارد.

دامنه و برد:

- دامنه: $(0, +\infty)$ — چون لگاریتم عدد منفی یا صفر تعریف نشده.
- برد: $\mathbb{R}$ — چون هر عدد حقیقی می‌تواند خروجی باشد.

مجانب عمودی: خط $x = 0$ (محور y) مجانب عمودی است، چون:

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$$

مثال ساده: $\log_{10} 1000 = 3$ چون $10^3 = 1000$. $\ln e = 1$ چون $e^1 = e$.
مثال مدیریتی: اگر سرمایه‌ای با نرخ ٪۲۰ سالانه رشد کند، چند سال طول می‌کشد تا دو برابر شود؟

$$2 = (1.2)^t \Rightarrow t = \log_{1.2} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 1.2} \approx \frac{0.693}{0.182} \approx 3.8 \text{سال}$$

۴.۴.۷ مفهوم ۴: قوانین لگاریتم

قوانین اصلی:

نام قانون	فرمول
لگاریتم ضرب	$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
لگاریتم تقسیم	$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
لگاریتم توان	$\log_a(x^n) = n \log_a x$
لگاریتم یک	$\log_a 1 = 0$
لگاریتم پایه	$\log_a a = 1$
تغییر پایه	$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
معکوس	$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$
توان‌ـلگاریتم	$a^{\log_a x} = x$

اثبات قانون ضرب: فرض کن $\log_a x = m$ و $\log_a y = n$. آنگاه $a^m = x$ و $a^n = y$. پس:

$$xy = a^m \cdot a^n = a^{m+n} \Rightarrow \log_a(xy) = m + n = \log_a x + \log_a y \quad \blacksquare$$

اثبات قانون تقسیم: مشابه، با استفاده از $a^m/a^n = a^{m-n}$.
اثبات قانون توان: فرض کن $\log_a x = m$، پس $a^m = x$. آنگاه:

$$x^n = (a^m)^n = a^{mn} \Rightarrow \log_a(x^n) = mn = n\log_a x \quad \blacksquare$$

مثال عددی:

$$\log_2(8\times 4) = \log_2 8 + \log_2 4 = 3 + 2 = 5 \quad (\text{چون } 2^5 = 32 = 8\times 4) \tag{۳۳}$$

$$\log_2\left(\frac{32}{8}\right) = \log_2 32 - \log_2 8 = 5 - 3 = 2 \tag{۳۴}$$

$$\log_2(8^3) = 3\log_2 8 = 3\times 3 = 9 \tag{۳۵}$$

$$\log_5 1 = 0 \tag{۳۶}$$

$$\log_7 7 = 1 \tag{۳۷}$$

$$\log_2 10 = \frac{\ln 10}{\ln 2} \approx \frac{2.3026}{0.6931} \approx 3.3219 \tag{۳۸}$$

۵.۴.۷ مفهوم ۵: معادلات نمایی

روش حل:

۱. اگر پایه‌ها یکسان باشند: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$.

۲. اگر پایه‌ها یکسان نباشند: از لگاریتم استفاده کن.

مثال ساده: $2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$.
مثال ساده: $3^{2x-1} = 27 \Rightarrow 3^{2x-1} = 3^3 \Rightarrow 2x-1 = 3 \Rightarrow x = 2$.
مثال با لگاریتم: $5^x = 20 \Rightarrow x = \log_5 20 = \frac{\ln 20}{\ln 5} \approx \frac{2.996}{1.609} \approx 1.862$.
مثال مدیریتی: یک سرمایه‌گذاری با نرخ ٪۱۵ سالانه. چند سال طول می‌کشد تا سه برابر شود؟

$$3 = (1.15)^t \Rightarrow t = \log_{1.15} 3 = \frac{\ln 3}{\ln 1.15} \approx \frac{1.0986}{0.1398} \approx 7.86 \text{سال}$$

۶.۴.۷ مفهوم ۶: معادلات لگاریتمی

روش حل:

۱. با استفاده از قوانین لگاریتم، عبارت را ساده کن.

۲. دو طرف را به توان پایه برسان: $\log_a x = m \Rightarrow x = a^m$.

۳. **همیشه** جواب را بررسی کن (دامنه لگاریتم: $x > 0$).

مثال ساده: $\log_2 x = 5 \Rightarrow x = 2^5 = 32$.
مثال: $\log_3(x+1) = 2 \Rightarrow x+1 = 9 \Rightarrow x = 8$.
مثال: $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$.

$$\log_2[x(x-2)] = 3 \tag{۳۹}$$

$$x(x-2) = 8 \tag{۴۰}$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \tag{۴۱}$$

$$(x-4)(x+2) = 0 \tag{۴۲}$$

$$x = 4 \text{ یا } x = -2 \tag{۴۳}$$

اما $x = -2$ قابل قبول نیست (دامنه). پس $x = 4$.
مثال مدیریتی: اگر تابع تولید $Q = 100\ln(L)$، برای تولید ۵۰۰ واحد چند کارگر لازم است؟

$$500 = 100\ln L \Rightarrow \ln L = 5 \Rightarrow L = e^5 \approx 148.4$$

پس حدود ۱۴۹ کارگر لازم است.

۷.۴.۷ مفهوم ۷: نامعادلات نمایی و لگاریتمی

نکته کلیدی:

- اگر $a > 1$: تابع صعودی است، علامت نامعادله تغییر نمی‌کند.
- اگر $0 < a < 1$: تابع نزولی است، علامت نامعادله برعکس می‌شود.

مثال نمایی: $2^x > 8 \Rightarrow 2^x > 2^3 \Rightarrow x > 3$.
مثال نمایی: $(0.5)^x > 0.125 \Rightarrow (0.5)^x > (0.5)^3 \Rightarrow x < 3$ (چون پایه < 1).
مثال لگاریتمی: $\log_2 x > 3 \Rightarrow x > 2^3 = 8$.
مثال لگاریتمی: $\log_{0.5} x > 3 \Rightarrow x < (0.5)^3 = 0.125$ (چون پایه < 1).

۸.۴.۷ مفهوم ۸: تبدیلات نموداری

تبدیلات اصلی:

- $f(x) + c$: انتقال عمودی به بالا ($c > 0$) یا پایین ($c < 0$).
- $f(x - c)$: انتقال افقی به راست ($c > 0$) یا چپ ($c < 0$).
- $-f(x)$: انعکاس نسبت به محور x.
- $f(-x)$: انعکاس نسبت به محور y.
- $af(x)$: کشش یا فشردگی عمودی.

مثال مدیریتی: تابع $f(t) = 100e^{0.05t}$ رشد جمعیت. اگر $g(t) = 100e^{0.05t} + 50$، یعنی ۵۰ نفر مهاجرت اضافه.

۹.۴.۷ مفهوم ۹: فرمول‌های مالی کلیدی

بهره مرکب:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

که P اصل سرمایه، r نرخ سالانه، n تعداد مرکب‌سازی در سال، t زمان (سال).
بهره مرکب پیوسته:

$$A = Pe^{rt}$$

ارزش فعلی:

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^t} \quad \text{یا} \quad PV = FV \cdot e^{-rt}$$

زمان دوبرابر شدن (Rule of ۷۲):

$$t \approx \frac{72}{r \times 100}$$

نرخ رشد مؤثر سالانه:

$$EAR = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1$$

۵.۷ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: محاسبه ساده نمایی
صورت مسئله: مقدار 3^4 و 2^{-3} و e^0 را حساب کن.
مرحله ۱: $3^4 = 81$.
مرحله ۲: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0.125$.
مرحله ۳: $e^0 = 1$.
نتیجه: ۸۱، ۰.۱۲۵، ۱.

مثال حل‌شده

مثال ۲: حل معادله نمایی با پایه یکسان
صورت مسئله: $2^{3x-1} = 32$.
مرحله ۱: $32 = 2^5$.
مرحله ۲: $2^{3x-1} = 2^5 \Rightarrow 3x - 1 = 5$.
مرحله ۳: $3x = 6 \Rightarrow x = 2$.
نتیجه: $x = 2$.

مثال حل‌شده

مثال ۳: حل معادله نمایی با لگاریتم
صورت مسئله: $7^x = 50$.
مرحله ۱: $x = \log_7 50$.
مرحله ۲: $x = \frac{\ln 50}{\ln 7} \approx \frac{3.912}{1.946} \approx 2.01$.
نتیجه: $x \approx 2.01$.

مثال حل‌شده

مثال ۴: حل معادله لگاریتمی
صورت مسئله: $\log_3(2x + 1) = 4$.
مرحله ۱: $2x + 1 = 3^4 = 81$.
مرحله ۲: $2x = 80 \Rightarrow x = 40$.
بررسی: $2(40) + 1 = 81 > 0$ ✓.
نتیجه: $x = 40$.

مثال حل‌شده

مثال ۵: ترکیب قوانین لگاریتم
صورت مسئله: $\log_2 16 + \log_2 4 - \log_2 8$ را ساده کن.
مرحله ۱: $\log_2 16 = 4$ (چون $2^4 = 16$).
مرحله ۲: $\log_2 4 = 2$.
مرحله ۳: $\log_2 8 = 3$.
مرحله ۴: $4 + 2 - 3 = 3$.
نتیجه: ۳.

مثال حل‌شده

مثال ۶: بهره مرکب سالانه
صورت مسئله: ۱۰۰ میلیون تومان با نرخ ٪۱۵ سالانه به‌صورت مرکب. بعد از ۵ سال چقدر می‌شود؟
مرحله ۱: $A = 100(1.15)^5$.
مرحله ۲: $(1.15)^5 \approx 2.0114$.
مرحله ۳: $A \approx 201.14$ میلیون.
نتیجه: حدود ۲۰۱ میلیون تومان.

مثال حل‌شده

مثال ۷: بهره مرکب ماهانه
صورت مسئله: ۵۰ میلیون تومان با نرخ ٪۱۲ سالانه، مرکب ماهانه. بعد از ۳ سال؟
مرحله ۱: $n = 12$، $r = 0.12$، $t = 3$.
مرحله ۲: $A = 50\left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{12\times 3} = 50(1.01)^{36}$.
مرحله ۳: $(1.01)^{36} \approx 1.4308$.
مرحله ۴: $A \approx 71.54$ میلیون.
نتیجه: حدود ۵.۷۱ میلیون تومان.

مثال حل‌شده

مثال ۸: بهره پیوسته
صورت مسئله: ۲۰۰ میلیون با نرخ ٪۸ به‌صورت پیوسته. بعد از ۱۰ سال؟
مرحله ۱: $A = 200e^{0.08\times 10} = 200e^{0.8}$.
مرحله ۲: $e^{0.8} \approx 2.2255$.
مرحله ۳: $A \approx 445.1$ میلیون.
نتیجه: حدود ۴۴۵ میلیون تومان.

مثال حل‌شده

مثال ۹: زمان دوبرابر شدن
صورت مسئله: با نرخ ٪۱۰ سالانه، چند سال طول می‌کشد سرمایه دو برابر شود؟
مرحله ۱: $(1.10)^t = 2$.
مرحله ۲: $t = \log_{1.10} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 1.10} \approx \frac{0.6931}{0.0953} \approx 7.27$ سال.
تقریب Rule of ۷۲: $72/10 = 7.2$ سال (نزدیک).
نتیجه: حدود ۳.۷ سال.

مثال حل‌شده

مثال ۱۰: ارزش فعلی
صورت مسئله: می‌خواهی بعد از ۵ سال ۱۰۰ میلیون داشته باشی. با نرخ ٪۱۲، امروز چقدر باید سرمایه‌گذاری کنی؟
مرحله ۱: $PV = \frac{100}{(1.12)^5}$.
مرحله ۲: $(1.12)^5 \approx 1.7623$.
مرحله ۳: $PV \approx 56.74$ میلیون.
نتیجه: حدود ۷.۵۶ میلیون تومان.

مثال حل‌شده

مثال ۱۱: استهلاک
صورت مسئله: یک ماشین ۵۰۰ میلیون تومان خریداری شده و سالانه ٪۱۵ استهلاک دارد. بعد از ۴ سال ارزش آن چقدر است؟
مرحله ۱: $V(t) = 500(0.85)^t$.
مرحله ۲: $V(4) = 500(0.85)^4$.
مرحله ۳: $(0.85)^4 \approx 0.5220$.
مرحله ۴: $V(4) \approx 261$ میلیون.
نتیجه: حدود ۲۶۱ میلیون تومان.

مثال حل‌شده

مثال ۱۲: رشد جمعیت
صورت مسئله: جمعیت یک شهر ۵۰۰،۰۰۰ نفر با نرخ رشد ٪۲.۵ سالانه. بعد از ۲۰ سال؟
مرحله ۱: $P(20) = 500{,}000(1.025)^{20}$.
مرحله ۲: $(1.025)^{20} \approx 1.6386$.
مرحله ۳: $P(20) \approx 819{,}300$.
نتیجه: حدود ۸۱۹،۳۰۰ نفر.

مثال حل‌شده

مثال ۱۳: نرخ مؤثر سالانه
صورت مسئله: بانکی نرخ ٪۱۸ با مرکب ماهانه اعلام می‌کند. نرخ مؤثر سالانه چقدر است؟
مرحله ۱: $EAR = \left(1 + \frac{0.18}{12}\right)^{12} - 1 = (1.015)^{12} - 1$.
مرحله ۲: $(1.015)^{12} \approx 1.1956$.
مرحله ۳: $EAR \approx 0.1956 = 19.56\%$.
نتیجه: نرخ مؤثر ٪۱۹.۵۶ (بیشتر از ٪۱۸ اسمی).

مثال حل‌شده

مثال ۱۴: تابع تولید لگاریتمی
صورت مسئله: $Q(L) = 200\ln(L) + 100$. اگر $L = 50$، تولید چقدر است؟
مرحله ۱: $\ln 50 \approx 3.912$.
مرحله ۲: $Q(50) = 200(3.912) + 100 = 782.4 + 100 = 882.4$.
نتیجه: حدود ۸۸۲ واحد.

مثال حل‌شده

مثال ۱۵: مطلوبیت لگاریتمی
صورت مسئله: تابع مطلوبیت $U(x) = 50\ln(x+1)$. مطلوبیت در $x = 10$ چقدر است؟
مرحله ۱: $U(10) = 50\ln 11$.
مرحله ۲: $\ln 11 \approx 2.3979$.
مرحله ۳: $U(10) \approx 119.9$.
نتیجه: حدود ۱۲۰ واحد مطلوبیت.

۶.۷ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه ۱: فرض $\log(x+y) = \log x + \log y$.
راه پیشگیری: قانون ضرب فقط برای $\log(xy)$ است، نه $\log(x+y)$.
اشتباه ۲: فرض $(\log x)^2 = 2\log x$.
راه پیشگیری: $(\log x)^2$ با $\log(x^2)$ فرق دارد.
اشتباه ۳: فراموش کردن شرط $x > 0$ در لگاریتم.
راه پیشگیری: همیشه دامنه را بررسی کن.
اشتباه ۴: اشتباه بین e^{x+y} و $e^x + e^y$.
راه پیشگیری: $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$، نه جمع.
اشتباه ۵: فراموش کردن تغییر علامت در نامعادلات با پایه < 1.
راه پیشگیری: اگر پایه < 1، علامت نامعادله برعکس می‌شود.
اشتباه ۶: استفاده از فرمول بهره ساده به‌جای مرکب.
راه پیشگیری: در بلندمدت، تفاوت فاحش است.
اشتباه ۷: فراموش کردن تبدیل نرخ درصد به اعشار.
راه پیشگیری: $15\% = 0.15$.

۷.۷ کاربرد در مدیریت

کاربرد مدیریتی

کاربرد ۱: بهره مرکب در بانکداری
بانک‌ها برای محاسبه سود سپرده از فرمول $A = P(1 + r/n)^{nt}$ استفاده می‌کنند. تفاوت مرکب ماهانه و سالانه می‌تواند میلیون‌ها تومان باشد.
کاربرد ۲: استهلاک دارایی
شرکت‌ها برای محاسبه ارزش دفتری دارایی‌ها از مدل زوال نمایی $V(t) = V_0(1-d)^t$ استفاده می‌کنند.
کاربرد ۳: رشد بازار
استارتاپ‌ها برای پیش‌بینی رشد کاربران از مدل نمایی استفاده می‌کنند. مثلاً اگر ماهانه ٪۲۰ رشد داشته باشند، بعد از ۱۲ ماه ۹.۸ برابر می‌شوند.
کاربرد ۴: ارزش فعلی در سرمایه‌گذاری
برای تصمیم‌گیری بین پروژه‌ها، مدیران از $PV = FV/(1+r)^t$ استفاده می‌کنند.
کاربرد ۵: تابع مطلوبیت لگاریتمی
در اقتصاد، مطلوبیت اغلب با تابع لگاریتمی مدل می‌شود، چون «مطلوبیت نهایی نزولی» دارد.

۸.۷ خلاصه فصل

۹.۷ خودآزمایی

۱.۹.۷ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. مقدار 2^5 چند است؟

آ) ۱۰

ب) ۲۵

مفهوم	فرمول	کاربرد
تابع نمایی	$f(x) = a^x$	رشد، زوال
تابع نمایی طبیعی	$f(x) = e^x$	بهره پیوسته
تابع لگاریتمی	$y = \log_a x \iff a^y = x$	حل معادلات نمایی
لگاریتم ضرب	$\log(xy) = \log x + \log y$	ساده‌سازی
لگاریتم تقسیم	$\log(x/y) = \log x - \log y$	ساده‌سازی
لگاریتم توان	$\log(x^n) = n \log x$	حل معادلات
تغییر پایه	$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$	محاسبه عددی
بهره مرکب	$A = P(1 + r/n)^{nt}$	سرمایه‌گذاری
بهره پیوسته	$A = Pe^{rt}$	مالی پیشرفته
ارزش فعلی	$PV = FV/(1 + r)^t$	تصمیم‌گیری
۷۲ of Rule	$t \approx 72/(r \times 100)$	تخمین سریع

ج) ۳۲

د) ۶۴

۲. $\log_3 81$ چند است؟

آ) ۳

ب) ۴

ج) ۵

د) ۹

۳. $\ln e^3$ چند است؟

آ) ۱

ب) ۳

ج) e

د) e^3

۴. $\log_2(16 \times 8)$ چند است؟

آ) ۷

ب) ۸

ج) ۱۲

د) ۱۲۸

۵. اگر $5^x = 125$، x چند است؟

آ) ۲

ب) ۳

ج) ۴

د) ۵

۶. $\log_{10} 0.001$ چند است؟

آ) -3

ب) -2

ج) 3

د) 0.001

۷. مقدار e^0 چند است؟

آ) ۰

ب) ۱

ج) e

د) تعریف نشده

۸. ۱۰۰ میلیون با نرخ ٪۱۰ مرکب سالانه بعد از ۲ سال:

آ) ۱۲۰

ب) ۱۲۱

ج) ۱۲۲

د) ۱۳۰

۹. $\log_2 x = -2 \Rightarrow x = ?$

آ) -4

ب) 0.25

ج) 4

د) 0.5

۱۰. اگر $0 < a < 1$، تابع a^x:

آ) صعودی

ب) نزولی

ج) ثابت

د) متناوب

۱۱. $\log_a 1$ برابر است با:

آ) a

ب) ۱

ج) ۰

د) تعریف نشده

۱۲. زمان دوبرابر شدن با نرخ ٪۸ (Rule of 72):

آ) ۸ سال

ب) ۹ سال

ج) ۱۰ سال

د) ۱۲ سال

۱۳. $(1.05)^{10}$ تقریباً:

آ) ۱.۵

ب) ۱.۶۳

ج) ۱.۸

د) ۲

۱۴. $\log_5 5^7$ چند است؟

آ) ۱

ب) ۵

ج) ۷

د) ۳۵

۱۵. اگر جمعیت با نرخ ٪۲ رشد کند، بعد از ۳۵ سال تقریباً چند برابر می‌شود؟

آ) ۱.۵

ب) ۲

ج) ۳

د) ۴

۲.۹.۷ تشریحی (۷ سوال)

۱۶. معادله $3^{2x+1} = 243$ را حل کن.

۱۷. $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$ را حل کن.

۱۸. ۲۰۰ میلیون با نرخ ٪۱۲ مرکب فصلی. بعد از ۴ سال چقدر می‌شود؟

۱۹. چند سال طول می‌کشد ۱۵۰ میلیون با نرخ ٪۹ به ۳۰۰ میلیون برسد؟

۲۰. $\log_3 27 + \log_3 9 - \log_3 81$ را حساب کن.

۲۱. ثابت کن $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$.

۲۲. یک ماشین ۸۰۰ میلیون با استهلاک ٪۲۰ سالانه. بعد از ۵ سال ارزش آن چقدر است؟

۱۰.۷ پاسخنامه تشریحی

۱. ج) $2^5 = 32$.

۲. ب) $3^4 = 81$.

۳. ب) $\ln e^3 = 3 \ln e = 3$.

۴. الف) $\log_2 16 + \log_2 8 = 4 + 3 = 7$.

۵. ب) $5^3 = 125$.

۶. الف) $10^{-3} = 0.001$.

۷. ب) $e^0 = 1$.

۸. ب) $100(1.1)^2 = 121$.

۹. ب) $2^{-2} = 0.25$.

۱۰. ب) پایه $1 >$، تابع نزولی.

۱۱. ج) $\log_a 1 = 0$.

۱۲. ب) $72/8 = 9$.

۱۳. ب) $(1.05)^{10} \approx 1.629$.

۱۴. ج) $\log_5 5^7 = 7$.

۱۵. ب) $(1.02)^{35} \approx 2.0$.

۱۶. $3^{2x+1} = 3^5 \Rightarrow 2x + 1 = 5 \Rightarrow x = 2$.

۱۷. $\log_2[x(x-2)] = 3 \Rightarrow x(x-2) = 8 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4$ ($x = -2$ رد چون است).

۱۸. $A = 200(1 + 0.12/4)^{4\times 4} = 200(1.03)^{16} \approx 200 \times 1.6047 \approx 320.94$ میلیون.

۱۹. $2 = (1.09)^t \Rightarrow t = \ln 2 / \ln 1.09 \approx 0.6931/0.0862 \approx 8.04$ سال.

۲۰. $\log_3 27 = 3$، $\log_3 9 = 2$، $\log_3 81 = 4$. نتیجه: $3 + 2 - 4 = 1$.

۲۱. فرض کن $\log_a x = m$ و $\log_a y = n$. آنگاه $a^m = x$ و $a^n = y$. پس $x/y = a^{m-n}$، یعنی $\log_a(x/y) = m - n$. ■

۲۲. $V(5) = 800(0.8)^5 = 800 \times 0.32768 \approx 262.1$ میلیون.

۱۱.۷ منابع پیشنهادی

- پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. فصل ۴.
- رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. فصل ۴.
- نیکوکار، م. (۱۳۹۷). *ریاضیات عمومی*. فصل ۴.
- T. S. Tan، (۲۰۱۹). *Applied Mathematics for the Managerial, Social and Life Sciences*. Ch. ۵.
- A. S. Salzman، (۲۰۱۷). *Mathematics for Business*. Ch. ۵.
- E. Ummer، (۲۰۱۸). *Basic Mathematics for Economics, Finance and Business*. Ch. ۵.

ایست بازرسی

پایان فصل ۴ — نسخه توسعه‌یافته
آمار: ~۲۰ صفحه A۴ | ۱۵ مثال حل‌شده | ۲۲ سوال | ۶ منبع

xcolor enumitem booktabs geometry amsmath,amssymb,amsthm [۱۲pt,a۴paper]article
xepersian hyperref tcolorbox
margin=۲.۵cm

فهرست مطالب

۸ فصل ۵: توابع خاص (نسخه توسعه‌یافته — حجم دوبرابر)

۱.۸ چکیده

در فصل‌های قبل با توابع خطی، درجه دوم، نمایی و لگاریتمی آشنا شدی. حالا وقت آن است که با «توابع خاص» آشنا شوی: توابعی که رفتار ویژه‌ای دارند و در مدل‌سازی مدیریتی نقش کلیدی ایفا می‌کنند. تابع زوج و فرد، تقارن را به ما نشان می‌دهد. تابع معکوس، به ما اجازه می‌دهد از خروجی به ورودی برسیم. تابع قدر مطلق، فاصله از هدف را اندازه می‌گیرد. تابع جزء صحیح، پله‌ای رفتار می‌کند و برای تعرفه‌های پله‌ای عالی است. تابع علامت، جهت تغییر را نشان می‌دهد. در این فصل، این توابع را با تعریف دقیق، شهود، فرمول، نمودار، و مثال‌های گسترده مدیریتی می‌آموزی. هدف نهایی: بتوانی برای هر پدیده مدیریتی، مناسب‌ترین تابع خاص را انتخاب کنی و رفتارش را تحلیل کنی.

۲.۸ اهداف یادگیری

- **تعریف کند:** تابع زوج، تابع فرد، تابع معکوس، تابع قدر مطلق، تابع جزء صحیح، تابع سقف، تابع علامت، تابع پله‌ای، تابع یکنوا.
- **تشخیص دهد:** آیا یک تابع زوج است؟ فرد است؟ معکوس‌پذیر است؟ یکنوا است؟
- **محاسبه کند:** مقادیر توابع خاص، معکوس توابع، ترکیب توابع خاص.
- **تحلیل کند:** تقارن، یکنوایی، رفتار پله‌ای، نقاط شکست.
- **مدل‌سازی کند:** تعرفه پله‌ای، مالیات، تخفیف، فاصله از هدف، تصمیم‌گیری.
- **ارزیابی کند:** کدام تابع خاص برای کدام مسئله مدیریتی مناسب‌تر است.

۳.۸ مقدمه طنز

تصور کن یک مدیر فروش می‌خواهد بداند «فروش این ماه من چقدر از هدف فاصله دارد؟» اگر هدف ۱۰۰ میلیون و فروش ۸۵ میلیون باشد، فاصله ۱۵ میلیون است. اما اگر فروش ۱۱۵ میلیون باشد، فاصله باز هم ۱۵ میلیون است — فقط در جهت مخالف. این دقیقاً کاری است که «تابع قدر مطلق» انجام می‌دهد: فاصله را بدون توجه به جهت اندازه می‌گیرد.

حالا تصور کن همان مدیر می‌خواهد بداند «چند بسته ۱۰ تایی کامل فروخته‌ام؟» اگر ۴۷ عدد فروخته باشد، ۴ بسته کامل و ۷ عدد اضافه. این دقیقاً کاری است که «تابع جزء صحیح» انجام می‌دهد: تعداد بسته‌های کامل را می‌دهد.

نکته طنزآمیز ماجرا اینجاست: بسیاری از افراد فکر می‌کنند «تابع» یعنی یک فرمول پیچیده با x و y. اما توابع خاص، مثل چاقوی جیبی چندکاره هستند: هر کدام برای یک کار خاص ساخته شده‌اند و اگر بلد باشی کدام را کجا استفاده کنی، می‌توانی هر مسئله مدیریتی را حل کنی. این فصل، همان جعبه‌ابزار توابع خاص است.

۴.۸ مفاهیم اصلی

۱.۴.۸ مفهوم ۱: تابع زوج (Even Function)

تعریف: تابع f زوج است اگر برای هر x در دامنه:

$$f(-x) = f(x)$$

شهود: تابع زوج نسبت به محور y متقارن است. یعنی اگر نمودار را از وسط تا کنی، دو نیمه روی هم می‌افتند.

نمودار: متقارن نسبت به محور y.
مثال‌های ساده:

- $f(x) = x^2 : f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ ؟
- $f(x) = x^4 : f(-x) = x^4 = f(x)$ ؟
- $f(x) = |x| : f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$ ؟
- $f(x) = \cos x : f(-x) = \cos(-x) = \cos x$ ؟

مثال مدیریتی: تابع سود $P(q) = -2q^2 + 100$ زوج است. یعنی سود در تولید ۵ واحد و ۵- واحد (اگر معنی داشته باشد) یکسان است.
نکته مهم: تابع زوج لزوماً در همه جا تعریف نشده؛ فقط باید برای هر x در دامنه، $-x$ هم در دامنه باشد.

۲.۴.۸ مفهوم ۲: تابع فرد (Odd Function)

تعریف: تابع f فرد است اگر برای هر x در دامنه:

$$f(-x) = -f(x)$$

شهود: تابع فرد نسبت به مبدأ متقارن است. یعنی اگر نمودار را ۱۸۰ درجه بچرخانی، به خودش می‌رسد.
نمودار: متقارن نسبت به مبدأ $(0,0)$.
مثال‌های ساده:

- $f(x) = x : f(-x) = -x = -f(x)$ ؟
- $f(x) = x^3 : f(-x) = -x^3 = -f(x)$ ؟
- $f(x) = \sin x : f(-x) = \sin(-x) = -\sin x$ ؟
- $f(x) = \frac{1}{x} : f(-x) = -\frac{1}{x} = -f(x)$ ؟

مثال مدیریتی: تابع تقاضا $Q(P) = -20P$ فرد است. یعنی اگر قیمت منفی شود (فرضی)، تقاضا مثبت می‌شود —— که در واقعیت معنی ندارد، اما ریاضیاتش درست است.
نکته: اگر $f(0)$ تعریف شده باشد و f فرد باشد، آنگاه $f(0) = 0$.
اثبات: $f(-0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = -f(0) \Rightarrow 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$. ■

۳.۴.۸ مفهوم ۳: نه زوج، نه فرد

تعریف: بسیاری از توابع نه زوج هستند و نه فرد.
مثال ساده: $f(x) = x^2 + x$. $f(-x) = x^2 - x$. این نه برابر $f(x)$ است و نه برابر $-f(x)$.
مثال مدیریتی: تابع سود $P(q) = -2q^2 + 40q - 100$ نه زوج است و نه فرد.

۴.۴.۸ مفهوم ۴: تابع معکوس (Inverse Function) — مرور و تعمیق

تعریف: تابع f معکوس‌پذیر است اگر یک‌به‌یک باشد. تابع معکوس f^{-1}:

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

خواص:

- $f(f^{-1}(x)) = x$

- $f^{-1}(f(x)) = x$
- دامنه f^{-1} = برد f
- برد f^{-1} = دامنه f
- نمودار f^{-1}، قرینه f نسبت به خط $y = x$ است.

روش یافتن معکوس:

۱. $y = f(x)$ بنویس.

۲. x را برحسب y حل کن.

۳. x و y را جابه‌جا کن.

مثال ساده: $f(x) = 3x - 7$.

$$y = 3x - 7 \quad (۴۴)$$

$$y + 7 = 3x \quad (۴۵)$$

$$x = \frac{y+7}{3} \quad (۴۶)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+7}{3} \quad (۴۷)$$

مثال مدیریتی: تابع هزینه $C(q) = 50q + 1000$. معکوس (تعداد محصول برحسب هزینه):

$$q = \frac{C - 1000}{50}$$

یعنی اگر بودجه ۵۰۰۰ تومان باشد، $q = (5000 - 1000)/50 = 80$ واحد.

معکوس توابع مهم:

تابع	معکوس	شرط
$f(x) = ax + b$	$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$	$a \neq 0$
$f(x) = x^2$	$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$	$x \geq 0$
$f(x) = x^3$	$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$	x همه
$f(x) = e^x$	$f^{-1}(x) = \ln x$	$x > 0$
$f(x) = a^x$	$f^{-1}(x) = \log_a x$	$x > 0$
$f(x) = \ln x$	$f^{-1}(x) = e^x$	x همه

۵.۴.۸ مفهوم ۵: تابع قدر مطلق (Absolute Value)

تعریف:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

شهود: قدر مطلق، فاصله از صفر است. همیشه نامنفی.

خواص:

- $|x| \geq 0$

- $|x| = 0 \iff x = 0$
- $|xy| = |x| \cdot |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ برای $y \neq 0$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ (نامساوی مثلثی)
- $|x - y|$ = فاصله بین x و y روی خط اعداد
- $\sqrt{x^2} = |x|$

نمودار: شکل V با رأس در مبدأ.
مثال ساده: $|0| = 0$، $|3| = 3$، $|-5| = 5$.
مثال مدیریتی: انحراف از هدف: اگر هدف فروش ۱۰۰ میلیون و فروش واقعی ۸۵ میلیون باشد، انحراف:

$$|85 - 100| = 15 \text{میلیون}$$

اگر فروش ۱۲۰ میلیون باشد، انحراف باز هم $|100 - 120| = 20$ میلیون.
معادلات قدر مطلق:

$$|x| = a \Rightarrow x = a \text{ یا } x = -a \quad (a \geq 0)$$
$$|x - c| = a \Rightarrow x = c + a \text{ یا } x = c - a$$

نامعادلات قدر مطلق:

$$|x| < a \iff -a < x < a$$
$$|x| > a \iff x > a \text{ یا } x < -a$$

مثال عددی: $|x - 3| = 5 \Rightarrow x = 8$ یا $x = -2$.
مثال عددی: $|x - 2| < 4 \Rightarrow -4 < x - 2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 6$.

۶.۴.۸ مفهوم ۶: تابع جزء صحیح (Floor Function)

تعریف:
$\lfloor x \rfloor =$ بزرگ‌ترین عدد صحیحی که از x کوچک‌تر یا مساوی است

شهود: جزء صحیح، عدد را «به پایین» گرد می‌کند.
مثال ساده:

$$\lfloor 3.7 \rfloor = 3 \quad (۴۸)$$
$$\lfloor 5 \rfloor = 5 \quad (۴۹)$$
$$\lfloor -2.3 \rfloor = -3 \quad (۵۰)$$
$$\lfloor 0.99 \rfloor = 0 \quad (۵۱)$$

نکته مهم: برای اعداد منفی، $\lfloor -2.3 \rfloor = -3$ است، نه -2! چون $-3 < -2.3$.
خواص:

- $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
- $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ برای n صحیح
- $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$

نمودار: پله‌ای نزولی.
مثال مدیریتی: اگر هر بسته شامل ۱۲ عدد باشد و ۵۰ عدد داشته باشیم، تعداد بسته کامل:

$$\lfloor 50/12 \rfloor = \lfloor 4.167 \rfloor = 4 \text{ بسته}$$

۷.۴.۸ مفهوم ۷: تابع سقف (Ceiling Function)

تعریف:

$\lceil x \rceil =$ کوچک‌ترین عدد صحیحی که از x بزرگ‌تر یا مساوی است

شهود: سقف، عدد را «به بالا» گرد می‌کند.

مثال ساده:

$$\lceil 3.2 \rceil = 4 \quad (۵۲)$$

$$\lceil 5 \rceil = 5 \quad (۵۳)$$

$$\lceil -2.7 \rceil = -2 \quad (۵۴)$$

$$\lceil 0.01 \rceil = 1 \quad (۵۵)$$

مثال مدیریتی: اگر برای حمل ۵۰ کالا، هر کامیون ۱۲ کالا حمل کند، تعداد کامیون لازم:

$$\lceil 50/12 \rceil = \lceil 4.167 \rceil = 5 \text{ کامیون}$$

رابطه بین جزء صحیح و سقف:

$$\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$$

۸.۴.۸ مفهوم ۸: تابع علامت (Sign Function)

تعریف:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

شهود: علامت عدد را برمی‌گرداند.

مثال مدیریتی: در تحلیل روند فروش، اگر $\operatorname{sgn}(S_t - S_{t-1}) = 1$، فروش افزایشی است؛ اگر -1، کاهشی؛ اگر 0، ثابت.

۹.۴.۸ مفهوم ۹: تابع پله‌ای (Step Function)

تعریف: تابعی که در بازه‌هایی ثابت است و در نقاط خاصی «پله» می‌خورد.

مثال ساده:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 2 \\ 2 & 2 \le x < 4 \\ 3 & 4 \le x < 6 \end{cases}$$

مثال مدیریتی: تعرفه پله‌ای برق:

$$C(x) = \begin{cases} 5000 & 0 \le x \le 100 \\ 5000 + 80(x - 100) & 100 < x \le 200 \\ 5000 + 8000 + 120(x - 200) & x > 200 \end{cases}$$

۱۰.۴.۸ مفهوم ۱۰: تابع یکنوا (Monotonic Function)

تعریف:

- **صعودی (Increasing):** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- **اکیداً صعودی:** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **نزولی (Decreasing):** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- **اکیداً نزولی:** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

شهود: تابع یکنوا، یا همیشه بالا می‌رود یا همیشه پایین می‌آید — بدون تغییر جهت.
قضیه: هر تابع اکیداً یکنوا، یک‌به‌یک (و لذا معکوس‌پذیر) است.
مثال مدیریتی: تابع هزینه $C(q) = 50q + 1000$ اکیداً صعودی است. یعنی هر واحد اضافه تولید، هزینه را زیاد می‌کند.

۱۱.۴.۸ مفهوم ۱۱: توابع مرکب با توابع خاص

ترکیب قدر مطلق و جزء صحیح:

$$f(x) = \lfloor |x| \rfloor$$

مثال: $f(-3.7) = \lfloor 3.7 \rfloor = 3$.
ترکیب معکوس و قدر مطلق:

$$f(x) = |x|^{-1} = \frac{1}{|x|}$$

۵.۸ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: تشخیص زوج و فرد
صورت مسئله: $f(x) = x^4 + 3x^2$ زوج است یا فرد؟
مرحله ۱: $f(-x) = (-x)^4 + 3(-x)^2 = x^4 + 3x^2 = f(x)$.
نتیجه: زوج است.

مثال حل‌شده

مثال ۲: تشخیص زوج و فرد
صورت مسئله: $f(x) = x^3 + x$ زوج است یا فرد؟
مرحله ۱: $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$.
نتیجه: فرد است.

مثال حل‌شده

مثال ۳: نه زوج، نه فرد
صورت مسئله: $f(x) = x^3 + x^2$.
مرحله ۱: $f(-x) = -x^3 + x^2$.
مرحله ۲: این نه $f(x)$ است و نه $-f(x)$.
نتیجه: نه زوج، نه فرد.

مثال حل‌شده

مثال ۴: یافتن معکوس
صورت مسئله: $f(x) = \frac{2x+3}{5}$. معکوس را بیاب.
مرحله ۱: $y = \frac{2x+3}{5}$.
مرحله ۲: $5y = 2x + 3 \Rightarrow 2x = 5y - 3 \Rightarrow x = \frac{5y-3}{2}$.
نتیجه: $f^{-1}(x) = \frac{5x-3}{2}$.
بررسی: $f(1) = 1$، $f^{-1}(1) = 1$. ✓

مثال حل‌شده

مثال ۵: معادله قدر مطلق
صورت مسئله: $|2x - 6| = 10$.
مرحله ۱: $2x - 6 = 10 \Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow x = 8$.
مرحله ۲: $2x - 6 = -10 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$.
نتیجه: $x = 8$ یا $x = -2$.

مثال حل‌شده

مثال ۶: نامعادله قدر مطلق
صورت مسئله: $|x - 4| \leq 6$.
مرحله ۱: $-6 \leq x - 4 \leq 6$.
مرحله ۲: $-2 \leq x \leq 10$.
نتیجه: $x \in [-2, 10]$.

مثال حل‌شده

مثال ۷: جزء صحیح
صورت مسئله: $\lfloor 7.8 \rfloor$، $\lfloor -3.2 \rfloor$، $\lfloor 5 \rfloor$ را حساب کن.
مرحله ۱: $\lfloor 7.8 \rfloor = 7$.
مرحله ۲: $\lfloor -3.2 \rfloor = -4$ (نه -3!).
مرحله ۳: $\lfloor 5 \rfloor = 5$.
نتیجه: ۷، -4، ۵.

مثال حل‌شده

مثال ۸: کاربرد جزء صحیح در بسته‌بندی
صورت مسئله: ۱۰۰ عدد کالا داریم. هر بسته ۸ عدد. چند بسته کامل و چند عدد اضافه؟
مرحله ۱: $\lfloor 100/8 \rfloor = \lfloor 12.5 \rfloor = 12$ بسته کامل.
مرحله ۲: باقیمانده: $100 - 12 \times 8 = 100 - 96 = 4$ عدد.
نتیجه: ۱۲ بسته کامل و ۴ عدد اضافه.

مثال حل‌شده

مثال ۹: کاربرد سقف در حمل
صورت مسئله: ۱۰۰ کالا، هر کامیون ۸ کالا. چند کامیون لازم است؟
مرحله ۱: $\lceil 100/8 \rceil = \lceil 12.5 \rceil = 13$.
نتیجه: ۱۳ کامیون (چون ۱۲ کامیون فقط ۹۶ کالا حمل می‌کنند).

مثال حل‌شده

مثال ۱۰: تعرفه پله‌ای
صورت مسئله: هزینه اشتراک: تا ۲۰ گیگ ۵۰ هزار تومان؛ بین ۲۰ تا ۵۰ گیگ، هر گیگ ۳ هزار تومان؛ بیش از ۵۰ گیگ، هر گیگ ۵ هزار تومان. هزینه ۷۰ گیگ؟
مرحله ۱: ۵۰ + ۳۰ × ۳ = ۵۰ + ۹۰ = ۱۴۰ (برای ۵۰ گیگ).
مرحله ۲: ۲۰ گیگ اضافه × ۵ = ۱۰۰.
مرحله ۳: ۱۴۰ + ۱۰۰ = ۲۴۰.
نتیجه: ۲۴۰ هزار تومان.

مثال حل‌شده

مثال ۱۱: تابع علامت در تحلیل روند
صورت مسئله: فروش یک شرکت در ۵ ماه: ۱۰۰، ۱۲۰، ۱۱۰، ۱۳۰، ۱۳۰. روند را با تابع علامت تحلیل کن.
مرحله ۱: تفاوت‌ها: $+20$، -10، $+20$، 0.
مرحله ۲: sgn: $+1$، -1، $+1$، 0.
نتیجه: روند صعودی با یک نوسان.

مثال حل‌شده

مثال ۱۲: یکنوایی
صورت مسئله: $f(x) = 3x + 5$ یکنوا است؟
مرحله ۱: فرض $x_1 < x_2$: $3x_1 < 3x_2 \Rightarrow 3x_1 + 5 < 3x_2 + 5$.
نتیجه: اکیداً صعودی.

مثال حل‌شده

مثال ۱۳: ترکیب قدر مطلق و معکوس
صورت مسئله: $f(x) = \frac{1}{|x|}$ برای $x \neq 0$. $f(-3)$ و $f(5)$ را حساب کن.
مرحله ۱: $f(-3) = 1/|-3| = 1/3$.
مرحله ۲: $f(5) = 1/5$.
نتیجه: $1/3$ و $1/5$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۴: حل نامعادله با جزء صحیح
صورت مسئله: $\lfloor x \rfloor = 3$. محدوده x؟
مرحله ۱: $\lfloor x \rfloor = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4$.
نتیجه: $x \in [3, 4)$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۵: کاربرد مدیریتی ترکیبی
صورت مسئله: یک شرکت حقوق پایه ۵ میلیون دارد. اگر فروش بیش از ۱۰۰ میلیون باشد، ٪۲ پاداش می‌گیرد. اگر فروش ۱۵۰ میلیون باشد، حقوق کل؟
مرحله ۱: پاداش: $0.02 \times 150 = 3$ میلیون.
مرحله ۲: حقوق کل: $5 + 3 = 8$ میلیون.
نتیجه: ۸ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۱۶: انحراف از هدف
صورت مسئله: هدف تولید ۵۰۰ واحد. تولید واقعی: ۴۸۰، ۵۲۰، ۵۰۰. انحراف مطلق هرکدام؟
مرحله ۱: $|480 - 500| = 20$.
مرحله ۲: $|520 - 500| = 20$.
مرحله ۳: $|500 - 500| = 0$.
نتیجه: ۲۰، ۲۰، ۰.

مثال حل‌شده

مثال ۱۷: معکوس تابع درجه دوم
صورت مسئله: $f(x) = x^2$ روی $[0, +\infty)$. معکوس را بیاب.
مرحله ۱: $y = x^2$ با $x \geq 0$.
مرحله ۲: $x = \sqrt{y}$ (چون $x \geq 0$).
نتیجه: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ برای $x \geq 0$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۸: تابع سقف در حقوق
صورت مسئله: هر کارگر ۵.۷ ساعت در روز کار می‌کند. برای ۴۰ ساعت کار، چند روز لازم است؟
مرحله ۱: $\lceil 40/7.5 \rceil = \lceil 5.33 \rceil = 6$.
نتیجه: ۶ روز.

۶.۸ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه ۱: فرض $\lfloor -3.2 \rfloor = -3$.
راه پیشگیری: جزء صحیح همیشه به پایین می‌رود: -4.
اشتباه ۲: فراموش کردن شرط $x \geq 0$ در معکوس x^2.
راه پیشگیری: ابتدا دامنه را محدود کن.
اشتباه ۳: فرض $|x+y| = |x| + |y|$.
راه پیشگیری: نامساوی مثلثی: $|x+y| \leq |x| + |y|$.
اشتباه ۴: اشتباه بین زوج و فرد.
راه پیشگیری: زوج: $f(-x) = f(x)$؛ فرد: $f(-x) = -f(x)$.
اشتباه ۵: فرض یکنوایی همه توابع.
راه پیشگیری: یکنوایی را با مشتق یا تعریف بررسی کن.
اشتباه ۶: فراموش کردن بررسی دامنه در معکوس.
راه پیشگیری: دامنه f^{-1} = برد f.

۷.۸ کاربرد در مدیریت

کاربرد مدیریتی

کاربرد ۱: تعرفه پله‌ای
شرکت‌های برق، آب، گاز و اینترنت از توابع پله‌ای برای محاسبه صورتحساب استفاده می‌کنند.
کاربرد ۲: بسته‌بندی
در انبارداری، برای محاسبه تعداد بسته‌های کامل از جزء صحیح و برای تعداد کامیون از سقف استفاده می‌شود.
کاربرد ۳: انحراف از هدف
در سیستم‌های کنترل کیفیت، انحراف مطلق از هدف معیار اصلی است.
کاربرد ۴: تحلیل روند
تابع علامت برای تشخیص صعودی/نزولی بودن روند فروش به کار می‌رود.
کاربرد ۵: مدل‌سازی حقوق
حقوق پایه + پاداش پله‌ای = تابع پله‌ای.
کاربرد ۶: تصمیم‌گیری
توابع یکنوا برای اطمینان از منطقی بودن تصمیم‌ها (مثلاً افزایش تولید نباید هزینه را کم کند).

۸.۸ خلاصه فصل

۹.۸ خودآزمایی

۱.۹.۸ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. $f(x) = x^2 + 1$ چه نوع تابعی است؟

آ) زوج

ب) فرد

ج) نه زوج، نه فرد

تابع	تعریف	کاربرد
زوج	$f(-x) = f(x)$	تقارن نسبت به y
فرد	$f(-x) = -f(x)$	تقارن نسبت به مبدأ
معکوس	$f^{-1}(y) = x$	از خروجی به ورودی
قدر مطلق	$\|x\|$	فاصله از صفر
جزء صحیح	$\lfloor x \rfloor$	بسته‌بندی کامل
سقف	$\lceil x \rceil$	حمل و نقل
علامت	$\text{sgn}(x)$	تحلیل روند
پله‌ای	ثابت در بازه‌ها	تعرفه پله‌ای
یکنوا	صعودی/نزولی	تضمین منطق

د) پله‌ای

۲. $f(x) = x^3$ چه نوع تابعی است؟

آ) زوج

ب) فرد

ج) نه زوج، نه فرد

د) ثابت

۳. $\lfloor 4.9 \rfloor$ چند است؟

آ) ۴

ب) ۵

ج) ۵.۴

د) ۰

۴. $\lceil 4.1 \rceil$ چند است؟

آ) ۴

ب) ۵

ج) ۵.۴

د) ۰

۵. $|7 - |$ چند است؟

آ) -7

ب) ۷

ج) ۰

د) ۱۴

۶. $|x - 3| = 5$ جواب دارد:

آ) $x = 8$

ب) $x = -2$

ج) هر دو

د) هیچ‌کدام

۷. $\lfloor -1.5 \rfloor$ چند است؟

آ) -1

ب) -2

ج) 1

د) 2

۸. معکوس $f(x) = 2x - 4$:

آ) $\frac{x+4}{2}$

ب) $\frac{x-4}{2}$

ج) $2x + 4$

د) $\frac{x}{2} - 4$

۹. اگر f فرد و $f(2) = 5$، آنگاه $f(-2)$:

آ) ۵

ب) -5

ج) ۰

د) ۵.۲

۱۰. $|x - 2| < 3$ یعنی:

آ) $-1 < x < 5$

ب) $x > 5$

ج) $x < -1$

د) $x = 2$

۱۱. تابع $f(x) = 5$ (ثابت) چه نوع تابعی است؟

آ) زوج

ب) فرد

ج) هر دو

د) هیچ‌کدام

۱۲. $\lceil 0.01 \rceil$ چند است؟

آ) ۰

ب) ۱

ج) ۰.۰۱

د) -1

۱۳. کدام تابع اکیداً صعودی است؟

آ) $f(x) = -x$

ب) $f(x) = x^2$ روی $\mathbb{R}$

ج) $f(x) = 2x + 1$

د) $f(x) = \frac{1}{x}$

۱۴. اگر ۲۵ کالا و هر بسته ۶ کالا، تعداد بسته کامل:

آ) ۳

ب) ۴

ج) ۵

د) ۶

۱۵. اگر ۲۵ کالا و هر کامیون ۶ کالا، تعداد کامیون:

آ) ۳

ب) ۴

ج) ۵

د) ۶

۲.۹.۸ تشریحی (۷ سوال)

۱۶. نشان بده $f(x) = x^4 - 3x^2$ زوج است.

۱۷. معکوس $f(x) = \frac{3x-2}{4}$ را بیاب.

۱۸. $|3x - 9| = 12$ را حل کن.

۱۹. $\lfloor x \rfloor = -2$ یعنی چه محدوده‌ای برای x؟

۲۰. اگر تابع هزینه $C(q) = 100q + 5000$، معکوس آن را بیاب و تفسیر کن.

۲۱. هزینه اشتراک: تا ۱۰ گیگ ۳۰ هزار؛ ۱۰ تا ۳۰ گیگ هر گیگ ۴ هزار؛ بیش از ۳۰ گیگ هر گیگ ۶ هزار. هزینه ۴۵ گیگ؟

۲۲. نشان بده تابع $f(x) = 2x + 3$ اکیداً صعودی است.

۱۰.۸ پاسخنامه تشریحی

۱. الف) $f(-x) = x^2 + 1 = f(x)$.
۲. ب) $f(-x) = -x^3 = -f(x)$.
۳. الف) $\lfloor 4.9 \rfloor = 4$.
۴. ب) $\lceil 4.1 \rceil = 5$.
۵. ب) $|-7| = 7$.
۶. ج) $x = 8$ یا $x = -2$.
۷. ب) $\lfloor -1.5 \rfloor = -2$.
۸. الف) $y = 2x - 4 \Rightarrow x = \frac{y+4}{2}$.
۹. ب) $f(-2) = -f(2) = -5$.
۱۰. الف) $-3 < x - 2 < 3 \Rightarrow -1 < x < 5$.
۱۱. الف) تابع ثابت زوج است (چون $f(-x) = f(x)$).
۱۲. ب) $\lceil 0.01 \rceil = 1$.
۱۳. ج) فقط $2x + 1$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.
۱۴. ب) $\lfloor 25/6 \rfloor = 4$.
۱۵. ج) $\lceil 25/6 \rceil = 5$.
۱۶. $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = f(x)$. ■
۱۷. $y = \frac{3x-2}{4} \Rightarrow 4y = 3x - 2 \Rightarrow 3x = 4y + 2 \Rightarrow x = \frac{4y+2}{3}$. پس $f^{-1}(x) = \frac{4x+2}{3}$.
۱۸. $3x - 9 = 12 \Rightarrow x = 7$ یا $3x - 9 = -12 \Rightarrow x = -1$.
۱۹. $-2 \le x < -1$.
۲۰. $q = \frac{C-5000}{100}$. یعنی اگر بودجه C باشد، تعداد محصول $q = (C - 5000)/100$.
۲۱. ۳۰ + ۴×۲۰ = ۳۰ + ۸۰ = ۱۱۰ (برای ۳۰ گیگ). ۱۵ گیگ اضافه × ۶ = ۹۰. کل: ۲۰۰ هزار تومان.
۲۲. فرض $x_1 < x_2$: $2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 3 < 2x_2 + 3$. ■

۱۱.۸ منابع پیشنهادی

- پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. فصل ۵.
- رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. فصل ۵.
- نیکوکار، م. (۱۳۹۷). *ریاضیات عمومی*. فصل ۵.
- T. S. Tan، (۲۰۱۹). *Applied Mathematics for the Managerial، Social and Life Sci-ences*. Ch. ۲.
- A. S. Salzman، (۲۰۱۷). *Mathematics for Business*. Ch. ۲.
- E. Ummer، (۲۰۱۸). *Basic Mathematics for Finance and Business Economics*. Ch. ۲.

ایست بازرسی

پایان فصل ۵ — نسخه توسعه‌یافته
آمار: ~۲۲ صفحه A۴ | ۱۸ مثال حل‌شده | ۲۲ سوال | ۶ منبع

xcolor enumitem booktabs geometry amsmath،amssymb،amsthm [۱۲pt،a۴paper]article
xepersian hyperref tcolorbox
margin=۲.۵cm
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)
فصل ۶: اصول شمارش (نسخه توسعه‌یافته) تیم ۵ نفره معمار آموزشی ۱۳ مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۹ فصل ۶: اصول شمارش (نسخه توسعه‌یافته – حجم دوبرابر)

۱.۹ چکیده

شمارش، هنر «شمردن بدون شمردن» است. در مدیریت، بارها با سوالاتی مواجه می‌شوی که پاسخشان یک عدد بزرگ است — تعداد راه‌های چیدن کارمندان در شیفت‌ها، تعداد کدهای تخفیف ممکن، تعداد مسیرهای توزیع، تعداد ترکیب‌های محصول. اگر بخواهی همه را دستی بشمری، عمرت کفاف نمی‌دهد. اصول شمارش، ابزارهایی هستند که این کار را در چند ثانیه انجام می‌دهند. در این فصل، اصل ضرب، اصل جمع، جایگشت، جایگشت با تکرار، جایگشت دوری، فاکتوریل، و کاربردهای گسترده مدیریتی را می‌آموزی. هدف نهایی: بتوانی هر مسئله شمارشی مدیریتی را تحلیل کنی و به عدد دقیق برسی.

۲.۹ اهداف یادگیری

- **تعریف کند:** اصل ضرب، اصل جمع، جایگشت، جایگشت با تکرار، جایگشت دوری، فاکتوریل، اصل متمم.
- **تشخیص دهد:** کدام اصل (ضرب یا جمع) برای یک مسئله مناسب است.
- **محاسبه کند:** $n!$، $P(n,r)$، جایگشت با تکرار، جایگشت دوری.
- **تحلیل کند:** مسائل شمارشی چندمرحله‌ای را به مراحل ساده‌تر تقسیم کند.
- **مدل‌سازی کند:** مسائل رمزگذاری، چیدمان، تخصیص، برنامه‌ریزی شیفت.
- **ارزیابی کند:** آیا مسئله «ترتیب مهم» است یا نه.

۳.۹ مقدمه طنز

تصور کن یک مدیر منابع انسانی می‌خواهد بداند «چند راه برای چیدن ۵ کارمند در ۳ شیفت مختلف وجود دارد؟» اگر بلد نباشد از اصول شمارش استفاده کند، ممکن است ساده‌لوحانه بگوید «۵ راه» یا «۱۵ راه» — در حالی که پاسخ واقعی ۲۴۳ است! این تفاوت، همان قدرت اصول شمارش است.

اصول شمارش مثل «ماشین‌حساب جادویی» هستند: به جای اینکه همه حالت‌ها را یکی‌یکی بشمری، با یک فرمول ساده به جواب می‌رسی. اما نکته مهم اینجاست که باید بدانی کدام فرمول را کجا استفاده کنی. اگر اشتباه کنی، ممکن است عددی به دست بیاوری که هزاران برابر با واقعیت فرق داشته باشد.

نکته طنزآمیز ماجرا اینجاست: بسیاری از افراد فکر می‌کنند «شمارش» یعنی «شمردن با انگشت». اما در دنیای مدیریت، تعداد حالت‌ها می‌تواند به میلیاردها برسد. اگر یک شرکت ۱۰ کارمند داشته باشد و بخواهد برای هر روز هفته یک تیم ۵ نفره تشکیل دهد، تعداد ترکیب‌ها بیش از ۲۵۰ عدد است. اگر بخواهد ترتیب را هم در نظر بگیرد، به بیش از ۳۰،۰۰۰ حالت می‌رسد. اینجاست که اصول شمارش، نجات‌بخش می‌شوند.

۴.۹ مفاهیم اصلی

۱.۴.۹ مفهوم ۱: فاکتوریل

تعریف: فاکتوریل یک عدد طبیعی n، حاصل‌ضرب همه اعداد طبیعی از ۱ تا n است:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

قرارداد:

$$0! = 1$$

شهود: فاکتوریل یعنی «چند راه برای چیدن n شیء متمایز در یک ردیف». مثلاً برای ۳ کتاب، $3! = 6$ راه چیدن داریم: ABC، ACB، BAC، BCA، CAB، CBA.

مثال عددی:

$$1! = 1 \tag{۵۶}$$
$$2! = 2 \times 1 = 2 \tag{۵۷}$$
$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6 \tag{۵۸}$$
$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \tag{۵۹}$$
$$5! = 120 \tag{۶۰}$$
$$6! = 720 \tag{۶۱}$$
$$7! = 5040 \tag{۶۲}$$
$$8! = 40320 \tag{۶۳}$$
$$9! = 362880 \tag{۶۴}$$
$$10! = 3628800 \tag{۶۵}$$

رشد انفجاری: فاکتوریل با سرعت باورنکردنی رشد می‌کند:

$$20! \approx 2.43 \times 10^{18}$$

یعنی حدود ۴۳.۲ کوینتیلیون! این عدد از تعداد ستارگان کهکشان ما بیشتر است.

خواص فاکتوریل:

$$n! = n \times (n-1)! \tag{۶۶}$$
$$\frac{n!}{(n-1)!} = n \tag{۶۷}$$
$$\frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \tag{۶۸}$$

مثال مدیریتی: اگر ۵ کارمند داشته باشی و بخواهی همه را در ۵ جایگاه مختلف (مدیر، معاون، سرپرست، کارشناس، کارآموز) بچینی، تعداد حالت‌ها:

$$5! = 120$$

۲.۴.۹ مفهوم ۲: اصل ضرب (Multiplication Principle)

تعریف: اگر یک کار در k مرحله انجام شود و مرحله iـام n_i راه داشته باشد، کل تعداد راه‌ها:

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$$

شهود: «و» $\Rightarrow$ ضرب. اگر کار از چند مرحله پشت‌سرهم تشکیل شده، تعداد راه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

مثال ساده: یک رستوران ۳ نوع پیش‌غذا، ۵ نوع غذای اصلی، و ۴ نوع دسر دارد. چند منوی مختلف می‌توان سفارش داد؟

$$3 \times 5 \times 4 = 60$$

مثال ساده: یک رمز ۴ رقمی داریم. اگر هر رقم ۰ تا ۹ باشد، چند رمز مختلف ممکن است؟

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$$

مثال مدیریتی: یک شرکت ۵ محصول و ۴ منطقه فروش دارد. برای هر ترکیب (محصول، منطقه) یک استراتژی بازاریابی لازم است. تعداد استراتژی‌ها:

$$5 \times 4 = 20$$

مثال مدیریتی: در تولید یک خودرو، ۶ رنگ بدنه، ۳ نوع موتور، ۲ نوع گیربکس، و ۴ نوع رینگ داریم. چند نسخه مختلف خودرو می‌توان تولید کرد؟

$$6 \times 3 \times 2 \times 4 = 144$$

۳.۴.۹ مفهوم ۳: اصل جمع (Addition Principle)

تعریف: اگر یک کار به k روش جداگانه (ناسازگار) انجام شود و روش iـام n_i راه داشته باشد، کل راه‌ها:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

شهود: «یا» $\Rightarrow$ جمع. اگر کار از چند روش مستقل انجام شود، تعداد راه‌ها را جمع می‌کنیم.
مثال ساده: یک دانشجو می‌تواند یا با اتوبوس (۳ خط) یا با مترو (۲ خط) به دانشگاه برود. تعداد راه‌ها:

$$3 + 2 = 5$$

مثال مدیریتی: یک شرکت می‌تواند محصولش را یا از طریق فروشگاه‌های زنجیره‌ای (۵ زنجیره) یا از طریق فروش آنلاین (۳ پلتفرم) یا از طریق نمایندگی (۴ نمایندگی) توزیع کند. تعداد کانال‌های توزیع:

$$5 + 3 + 4 = 12$$

نکته مهم: اصل جمع فقط وقتی کار می‌کند که روش‌ها «ناسازگار» باشند —— یعنی هم‌پوشانی نداشته باشند. اگر هم‌پوشانی باشد، باید از اصل شمول‌ـطرد استفاده کرد.

۴.۴.۹ مفهوم ۴: تفاوت اصل ضرب و اصل جمع

قاعده طلایی:

- اگر مراحل «پشت‌سرهم» و «وابسته» هستند $\Rightarrow$ اصل ضرب.
- اگر روش‌ها «موازی» و «مستقل» هستند $\Rightarrow$ اصل جمع.

مثال مقایسه‌ای:

- «۳ پیراهن و ۴ شلوار دارم. چند دست لباس می‌توانم بپوشم؟» $\Rightarrow 3 \times 4 = 12$ (اصل ضرب).
- «۳ پیراهن یا ۴ شلوار دارم. چند انتخاب دارم؟» $\Rightarrow 3 + 4 = 7$ (اصل جمع).

۵.۴.۹ مفهوم ۵: جایگشت (Permutation)

تعریف: جایگشت r شیء از n شیء متمایز، تعداد راه‌های چیدن r شیء در r جایگاه (با اهمیت ترتیب):

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

شهود: جایگشت یعنی «ترتیب مهم است». مثلاً چیدن ۳ نفر در ۳ صندلی —— کدام نفر کجا بنشیند مهم است.
فرمول بازگشتی:

$$P(n, r) = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$$

حالت خاص: اگر $r = n$:

$$P(n, n) = n!$$

مثال ساده: $P(5, 3) = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$.
مثال ساده: $P(10, 2) = 10 \times 9 = 90$.
مثال مدیریتی: در یک شرکت ۸ کارمند داریم. می‌خواهیم ۳ نفر را به‌عنوان مدیر، معاون و سرپرست انتخاب کنیم. تعداد راه‌ها:

$$P(8, 3) = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

مثال مدیریتی: یک رمز ۴ رقمی بدون تکرار از اعداد ۱ تا ۹. تعداد رمزها:

$$P(9, 4) = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$$

۶.۴.۹ مفهوم ۶: جایگشت با تکرار (Permutation with Repetition)

تعریف: اگر از n شیء، n_1 شیء یکسان از نوع اول، n_2 شیء یکسان از نوع دوم، ...، n_k شیء یکسان از نوع kـام داشته باشیم (که $\sum n_i = n$)، تعداد جایگشت‌های متمایز:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}$$

شهود: وقتی اشیاء یکسان داریم، بعضی جایگشت‌ها تکراری می‌شوند و باید تقسیم کنیم.
مثال ساده: کلمه «MAMA» را چند طور می‌توان چید؟ حروف: A، M، A، M. دو M یکسان و دو A یکسان:

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{24}{4} = 6$$

مثال ساده: کلمه «BOOK» را چند طور می‌توان چید؟ حروف: B، O، O، K. دو O یکسان:

$$\frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$$

مثال مدیریتی: یک شرکت می‌خواهد ۳ کارمند ارشد و ۲ کارمند عادی را در ۵ دفتر قرار دهد. اگر کارمندان هم‌رده یکسان در نظر گرفته شوند:

$$\frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{120}{12} = 10$$

۷.۴.۹ مفهوم ۷: جایگشت دوری (Circular Permutation)

تعریف: تعداد راه‌های چیدن n شیء متمایز در یک دایره:

$$(n-1)!$$

شهود: در چیدمان دایره‌ای، چرخش‌ها یکسان در نظر گرفته می‌شوند. پس یک نفر را ثابت می‌کنیم و بقیه را می‌چینیم.
مثال ساده: ۴ نفر دور یک میز گرد. تعداد چیدمان‌ها:

$$(4-1)! = 3! = 6$$

مثال مدیریتی: ۵ مدیر دور یک میز کنفرانس گرد می‌نشینند. تعداد چیدمان‌ها:

$$(5-1)! = 4! = 24$$

مثال مدیریتی: ۶ کارمند دور یک میز گرد برای جلسه. اگر ترتیب مهم باشد:

$$(6-1)! = 120$$

نکته: اگر چیدمان دایره‌ای با تقارن آینه‌ای (مثل دستبند) باشد، تقسیم بر ۲ هم می‌کنیم:

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

۸.۴.۹ مفهوم ۸: اصل متمم (Complement Principle)

تعریف: گاهی شمردن «آنچه نمی‌خواهیم» ساده‌تر از شمردن «آنچه می‌خواهیم» است:

$$\text{تعداد مطلوب} = \text{کل} - \text{تعداد نامطلوب}$$

شهود: اگر شمردن مستقیم سخت است، از متمم استفاده کن.
مثال ساده: چند رمز ۴ رقمی وجود دارد که حداقل یک رقم آن ۷ باشد؟ کل رمزها $10000 = 10^4 =$. رمزهایی که هیچ ۷ ندارند $6561 = 9^4 =$. پاسخ:

$$10000 - 6561 = 3439$$

مثال مدیریتی: یک شرکت ۱۰ کارمند دارد. چند تیم ۴ نفره می‌توان تشکیل داد که حداقل یک خانم داشته باشد؟ (فرض: ۶ آقا، ۴ خانم)

$$\text{کل تیم‌های ۴ نفره} = \binom{10}{4} = 210 \tag{۶۹}$$

$$\text{تیم‌های بدون خانم} = \binom{6}{4} = 15 \tag{۷۰}$$

$$\text{حداقل یک خانم} = 210 - 15 = 195 \tag{۷۱}$$

۹.۴.۹ مفهوم ۹: ترکیب (Combination) — پیش‌درآمد

تعریف: ترکیب r شیء از n شیء (بدون اهمیت ترتیب):

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

تفاوت با جایگشت:

- جایگشت: ترتیب مهم است (مدیر، معاون، سرپرست).
- ترکیب: ترتیب مهم نیست (تیم ۳ نفره).

مثال مدیریتی: از ۱۰ کارمند، چند تیم ۳ نفره می‌توان تشکیل داد؟

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \times 7!} = 120$$

نکته: ترکیب در فصل ۷ به‌طور کامل بررسی می‌شود.

۱۰.۴.۹ مفهوم ۱۰: قواعد تشخیص در مسائل شمارشی

درخت تصمیم:

سوال	پاسخ
آیا ترتیب مهم است؟	اگر بله: جایگشت؛ اگر نه: ترکیب
آیا تکرار مجاز است؟	اگر بله: توان یا جایگشت با تکرار؛ اگر نه: جایگشت/ترکیب ساده
آیا مراحل پشت‌سرهم است؟	اگر بله: اصل ضرب
آیا روش‌های موازی است؟	اگر بله: اصل جمع
آیا شمارش مستقیم سخت است؟	اگر بله: اصل متمم

۵.۹ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: اصل ضرب ساده
صورت مسئله: یک کافه ۴ نوع قهوه، ۳ نوع شیرینی و ۲ نوع آبمیوه دارد. چند سفارش مختلف (یک قهوه، یک شیرینی، یک آبمیوه) ممکن است؟
مرحله ۱: این یک مسئله چندمرحله‌ای است: انتخاب قهوه، سپس شیرینی، سپس آبمیوه.
مرحله ۲: طبق اصل ضرب: $4 \times 3 \times 2 = 24$.
نتیجه: ۲۴ سفارش مختلف.

مثال حل‌شده

مثال ۲: اصل جمع
صورت مسئله: یک دانشجو می‌تواند برای رسیدن به دانشگاه از ۴ مسیر شمالی، ۳ مسیر جنوبی یا ۲ مسیر شرقی استفاده کند. چند راه دارد؟
مرحله ۱: مسیرها ناسازگارند (نمی‌توان هم شمالی رفت هم جنوبی).
مرحله ۲: طبق اصل جمع: $4 + 3 + 2 = 9$.
نتیجه: ۹ راه.

مثال حل‌شده

مثال ۳: ترکیب اصل ضرب و جمع
صورت مسئله: یک شرکت می‌خواهد یک محصول جدید را در ۲ بازار (داخلی و خارجی) عرضه کند. برای بازار داخلی ۳ استراتژی و برای بازار خارجی ۴ استراتژی دارد. چند برنامه کلی می‌تواند داشته باشد؟
مرحله ۱: اگر تصمیم بگیرد فقط داخلی: ۳ راه.
مرحله ۲: اگر فقط خارجی: ۴ راه.
مرحله ۳: اگر هر دو: $3 \times 4 = 12$ راه.
مرحله ۴: کل: $3 + 4 + 12 = 19$.
نتیجه: ۱۹ برنامه.

مثال حل‌شده

مثال ۴: فاکتوریل
صورت مسئله: $\frac{8!}{6!}$ را ساده کن.
مرحله ۱: $8! = 8 \times 7 \times 6!$.
مرحله ۲: $\frac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 8 \times 7 = 56$.
نتیجه: ۵۶.

مثال حل‌شده

مثال ۵: جایگشت
صورت مسئله: از ۷ کتاب مختلف، چند راه برای چیدن ۳ کتاب در قفسه وجود دارد؟
مرحله ۱: ترتیب مهم است (کتاب اول، دوم، سوم).
مرحله ۲: $P(7,3) = 7 \times 6 \times 5 = 210$.
نتیجه: ۲۱۰ راه.

مثال حل‌شده

مثال ۶: جایگشت با تکرار
صورت مسئله: کلمه «BANANA» را چند طور می‌توان چید؟
مرحله ۱: حروف: B (۱)، A (۳)، N (۲). کل ۶ حرف.
مرحله ۲: $\frac{6!}{1!\times 3!\times 2!} = \frac{720}{6\times 2} = \frac{720}{12} = 60$.
نتیجه: ۶۰ چیدمان.

مثال حل‌شده

مثال ۷: جایگشت دوری
صورت مسئله: ۸ نفر دور یک میز گرد می‌نشینند. چند چیدمان ممکن است؟
مرحله ۱: فرمول جایگشت دوری: $(n-1)!$.
مرحله ۲: $(8-1)! = 7! = 5040$.
نتیجه: ۵۰۴۰ چیدمان.

مثال حل‌شده

مثال ۸: اصل متمم
صورت مسئله: یک رمز ۵ رقمی (اعداد ۰-۹، با تکرار مجاز). چند رمز وجود دارد که حداقل یک رقم آن زوج باشد؟
مرحله ۱: کل رمزها: $10^5 = 100000$.
مرحله ۲: رمزهای بدون رقم زوج (فقط اعداد فرد ۱،۳،۵،۷،۹): $5^5 = 3125$.
مرحله ۳: حداقل یک زوج: $100000 - 3125 = 96875$.
نتیجه: ۹۶،۸۷۵ رمز.

مثال حل‌شده

مثال ۹: برنامه‌ریزی شیفت
صورت مسئله: یک بیمارستان ۳ شیفت (صبح، عصر، شب) دارد. ۶ پرستار باید در شیفت‌ها توزیع شوند (هر شیفت ۲ پرستار). چند راه ممکن است؟
مرحله ۱: انتخاب ۲ پرستار برای صبح: $\binom{6}{2} = 15$.
مرحله ۲: انتخاب ۲ پرستار برای عصر از ۴ نفر باقی‌مانده: $\binom{4}{2} = 6$.
مرحله ۳: ۲ نفر آخر برای شب: $\binom{2}{2} = 1$.
مرحله ۴: طبق اصل ضرب: $15 \times 6 \times 1 = 90$.
نتیجه: ۹۰ راه.

مثال حل‌شده

مثال ۱۰: کد تخفیف
صورت مسئله: یک فروشگاه می‌خواهد کد تخفیف ۶ کاراکتری بسازد: ۲ حرف اول (از ۲۶ حرف انگلیسی) و ۴ رقم (از ۱۰ رقم). چند کد ممکن است؟
مرحله ۱: ۲ حرف: $26^2 = 676$.
مرحله ۲: ۴ رقم: $10^4 = 10000$.
مرحله ۳: $676 \times 10000 = 6{,}760{,}000$.
نتیجه: ۷۶.۶ میلیون کد ممکن.

مثال حل‌شده

مثال ۱۱: مسیرهای شبکه‌ای
صورت مسئله: یک مدیر می‌خواهد از نقطه $(0,0)$ به $(4,3)$ برود، فقط با حرکت راست (R) و بالا (U). چند مسیر ممکن است؟
مرحله ۱: باید ۴ بار R و ۳ بار U داشته باشیم (کل ۷ حرکت).
مرحله ۲: تعداد جایگشت‌های متمایز: $\frac{7!}{4!\times 3!} = \frac{5040}{24\times 6} = \frac{5040}{144} = 35$.
نتیجه: ۳۵ مسیر.

مثال حل‌شده

مثال ۱۲: تخصیص وظایف
صورت مسئله: ۵ کارمند و ۴ وظیفه مختلف. هر کارمند فقط یک وظیفه می‌گیرد. چند راه تخصیص ممکن است؟
مرحله ۱: وظیفه اول را از ۵ نفر انتخاب می‌کنیم: ۵ راه.
مرحله ۲: وظیفه دوم از ۴ نفر باقی‌مانده: ۴ راه.
مرحله ۳: وظیفه سوم از ۳ نفر: ۳ راه.
مرحله ۴: وظیفه چهارم از ۲ نفر: ۲ راه.
مرحله ۵: $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$.
نتیجه: ۱۲۰ راه.

مثال حل‌شده

مثال ۱۳: شمارش با محدودیت
صورت مسئله: چند عدد ۴ رقمی وجود دارد که رقم هزارگان آن ۷ و رقم یکان آن فرد باشد؟
مرحله ۱: رقم هزارگان ثابت ۷: ۱ راه.
مرحله ۲: رقم یکان فرد: ۵ راه (۱،۳،۵،۷،۹).
مرحله ۳: رقم صدگان: ۱۰ راه.
مرحله ۴: رقم دهگان: ۱۰ راه.
مرحله ۵: $1 \times 10 \times 10 \times 5 = 500$.
نتیجه: ۵۰۰ عدد.

مثال حل‌شده

مثال ۱۴: جایگشت با اشیاء یکسان
صورت مسئله: در یک جلسه ۳ مدیر، ۲ کارشناس و ۱ کارآموز شرکت می‌کنند. چند راه برای چیدن آن‌ها در یک ردیف وجود دارد (افراد هم‌رده یکسان در نظر گرفته شوند)؟
مرحله ۱: کل ۶ نفر.
مرحله ۲: $\frac{6!}{3!\times 2!\times 1!} = \frac{720}{6\times 2} = 60$.
نتیجه: ۶۰ چیدمان.

مثال حل‌شده

مثال ۱۵: شمارش تیم
صورت مسئله: از ۱۲ دانشجو، می‌خواهیم یک تیم ۴ نفره انتخاب کنیم که رئیس و منشی داشته باشد. چند راه ممکن است؟
مرحله ۱: انتخاب ۲ نفر برای رئیس و منشی: $P(12,2) = 132$.
مرحله ۲: انتخاب ۲ نفر دیگر از ۱۰ نفر: $\binom{10}{2} = 45$.
مرحله ۳: $132 \times 45 = 5940$.
نتیجه: ۵۹۴۰ راه.

مثال حل‌شده

مثال ۱۶: شمارش با اصل متمم
صورت مسئله: از ۱۰ کارمند (۶ آقا، ۴ خانم)، چند تیم ۴ نفره می‌توان تشکیل داد که هر دو جنس حضور داشته باشند؟
مرحله ۱: کل تیم‌ها: $\binom{10}{4} = 210$.
مرحله ۲: تیم‌های فقط آقا: $\binom{6}{4} = 15$.
مرحله ۳: تیم‌های فقط خانم: $\binom{4}{4} = 1$.
مرحله ۴: تیم‌های مختلط: $210 - 15 - 1 = 194$.
نتیجه: ۱۹۴ تیم.

مثال حل‌شده

مثال ۱۷: شمارش رمز با محدودیت
صورت مسئله: رمز ۴ رقمی از اعداد ۱ تا ۹ (بدون تکرار). چند رمز وجود دارد که با رقم فرد شروع شود؟
مرحله ۱: رقم اول فرد: ۵ انتخاب (۱،۳،۵،۷،۹).
مرحله ۲: سه رقم بعدی از ۸ رقم باقی‌مانده: $P(8,3) = 8 \times 7 \times 6 = 336$.
مرحله ۳: $5 \times 336 = 1680$.
نتیجه: ۱۶۸۰ رمز.

مثال حل‌شده

مثال ۱۸: شمارش صندلی
صورت مسئله: ۴ زوج (۸ نفر) دور یک میز گرد می‌نشینند. اگر هر زوج کنار هم باشند، چند چیدمان ممکن است؟
مرحله ۱: هر زوج را یک واحد در نظر بگیر: ۴ واحد.
مرحله ۲: چیدمان دوری ۴ واحد: $(4-1)! = 6$.
مرحله ۳: هر زوج ۲ حالت داخلی: $2^4 = 16$.
مرحله ۴: $6 \times 16 = 96$.
نتیجه: ۹۶ چیدمان.

۶.۹ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه ۱: استفاده از اصل جمع در مسائل پشت‌سرهم.
راه پیشگیری: اگر مراحل وابسته‌اند، از ضرب استفاده کن.
اشتباه ۲: فراموش کردن تکرار ممنوع.
راه پیشگیری: در جایگشت، هر بار یکی از گزینه‌ها کم می‌شود.
اشتباه ۳: فراموش کردن اهمیت ترتیب.
راه پیشگیری: بپرس: «آیا (A،B) با (B،A) فرق دارد؟»
اشتباه ۴: اشتباه در فاکتوریل اعداد بزرگ.
راه پیشگیری: از ساده‌سازی کسری استفاده کن.
اشتباه ۵: فراموش کردن تقسیم بر $n_i!$ در جایگشت با تکرار.
راه پیشگیری: اشیاء یکسان را جدا بشمار.
اشتباه ۶: استفاده از $n!$ به‌جای $(n-1)!$ در چیدمان دوری.
راه پیشگیری: در چیدمان دوری، یک نفر را ثابت کن.
اشتباه ۷: فراموش کردن بررسی ناسازگاری در اصل جمع.
راه پیشگیری: اگر هم‌پوشانی دارد، از اصل شمول–طرد استفاده کن.

۷.۹ کاربرد در مدیریت

کاربرد مدیریتی

کاربرد ۱: برنامه‌ریزی شیفت
بیمارستان‌ها و کارخانه‌ها برای تخصیص کارکنان به شیفت‌ها از اصول شمارش استفاده می‌کنند.
کاربرد ۲: تولید کد و رمز
شرکت‌های فناوری برای تولید کدهای تخفیف، رمز عبور، و شناسه‌های یکتا از اصل ضرب استفاده می‌کنند.
کاربرد ۳: مسیریابی و توزیع
شرکت‌های پخش برای یافتن مسیرهای بهینه توزیع از شمارش مسیرها استفاده می‌کنند.
کاربرد ۴: تخصیص وظایف
مدیران پروژه برای تخصیص وظایف به اعضای تیم از جایگشت و ترکیب استفاده می‌کنند.
کاربرد ۵: تحلیل ترکیب محصول
برای پیش‌بینی تعداد نسخه‌های مختلف یک محصول (رنگ، موتور، آپشن‌ها) از اصل ضرب استفاده می‌شود.
کاربرد ۶: تحلیل ریسک
در مدیریت ریسک، تعداد سناریوهای ممکن با اصول شمارش محاسبه می‌شود.

۸.۹ خلاصه فصل

مفهوم	فرمول	کاربرد
فاکتوریل	$n!$	چیدمان کامل
اصل ضرب	$n_1 \times n_2 \times \cdots$	مراحل پشت‌سرهم
اصل جمع	$n_1 + n_2 + \cdots$	روش‌های موازی
جایگشت	$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$	ترتیب مهم
جایگشت با تکرار	$\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$	اشیاء یکسان
جایگشت دوری	$(n-1)!$	چیدمان دایره‌ای
اصل متمم	کل − نامطلوب	شمارش غیرمستقیم

۹.۹ خودآزمایی

۱.۹.۹ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. $5!$ چند است؟

آ) ۲۵

ب) ۶۰

ج) ۱۲۰

د) ۷۲۰

۲. $P(6,2)$ چند است؟

آ) ۱۲

ب) ۳۰

ج) ۳۶

د) ۷۲۰

۳. کلمه «ABAB» چند چیدمان دارد؟

آ) ۴

ب) ۶

ج) ۱۲

د) ۲۴

۴. ۵ نفر دور میز گرد. چند چیدمان؟

آ) ۵

ب) ۲۴

ج) ۱۲۰

د) ۷۲۰

۵. یک رستوران ۳ پیش‌غذا، ۴ اصلی، ۲ دسر. چند منو؟

آ) ۹

ب) ۱۲

ج) ۲۴

د) ۳۶

۶. از ۸ نفر، چند راه برای انتخاب ۳ نفر برای ۳ جایگاه مختلف؟

آ) ۲۴

ب) ۵۶

ج) ۳۳۶

د) ۴۰۳۲۰

۷. رمز ۳ رقمی از اعداد ۰–۹ با تکرار. چند رمز؟

آ) ۳۰

ب) ۱۰۰

ج) ۷۲۰

د) ۱۰۰۰

۸. چند عدد ۳ رقمی با ارقام متمایز از ۱ تا ۵؟

آ) ۱۰

ب) ۲۰

ج) ۶۰

د) ۱۲۵

۹. $\frac{10!}{8!}$ چند است؟

آ) ۱۸

ب) ۹۰

ج) ۱۰۰

د) ۷۲۰

۱۰. کلمه «MISS» چند چیدمان دارد؟

آ) ۴

ب) ۱۲

ج) ۲۴

د) ۲۵۶

۱۱. ۴ زوج دور میز گرد با زوج‌های کنار هم. چند چیدمان؟

آ) ۴۸

ب) ۹۶

ج) ۱۹۲

د) ۳۸۴

۱۲. از ۱۰ نفر، چند تیم ۳ نفره؟

آ) ۳۰

ب) ۱۲۰

ج) ۷۲۰

د) ۱۰۰۰

۱۳. چند عدد ۴ رقمی وجود دارد که همه ارقام آن زوج باشد؟

آ) ۴۰۰

ب) ۵۰۰

ج) ۶۲۵

د) ۱۰۰۰

۱۴. $0!$ چند است؟

آ) ۰

ب) ۱

ج) تعریف نشده

د) ∞

۱۵. در مسیر $(0,0)$ به $(3,2)$ با R و U، چند مسیر؟

آ) ۵

ب) ۱۰

ج) ۲۰

د) ۳۲

۲.۹.۹ تشریحی (۸ سوال)

۱۶. از ۷ کتاب مختلف، چند راه برای چیدن ۴ کتاب در قفسه؟
۱۷. کلمه «STATISTICS» چند چیدمان دارد؟
۱۸. ۶ نفر دور میز گرد. اگر ۲ نفر خاص کنار هم باشند، چند چیدمان؟
۱۹. از ۱۰ کارمند (۶ آقا، ۴ خانم)، چند تیم ۵ نفره با حداقل ۲ خانم؟
۲۰. رمز ۵ رقمی از ۱ تا ۹ بدون تکرار. چند رمز با شروع فرد؟
۲۱. یک شرکت ۳ محصول، ۴ منطقه، ۲ کانال توزیع دارد. چند استراتژی؟
۲۲. از ۱۲ دانشجو، تیم ۴ نفره با رئیس و منشی. چند راه؟
۲۳. ۷ نفر دور میز گرد. اگر ۳ نفر خاص همیشه کنار هم باشند، چند چیدمان؟

۱۰.۹ پاسخنامه تشریحی

۱. ج) $5! = 120$.
۲. ب) $6 \times 5 = 30$.
۳. ب) $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$.
۴. ب) $(5-1)! = 24$.
۵. ج) $3 \times 4 \times 2 = 24$.
۶. ج) $P(8,3) = 8 \times 7 \times 6 = 336$.
۷. د) $10^3 = 1000$.
۸. ج) $5 \times 4 \times 3 = 60$.
۹. ب) $10 \times 9 = 90$.
۱۰. ب) $\frac{4!}{2!} = 12$.
۱۱. ب) $(4-1)! \times 2^4 = 6 \times 16 = 96$.
۱۲. ب) $\binom{10}{3} = 120$.
۱۳. ب) رقم اول از ۲،۴،۶،۸: ۴ انتخاب. سه رقم بعد از ۰،۲،۴،۶،۸: $5^3 = 125$. کل: $4 \times 125 = 500$.
۱۴. ب) طبق قرارداد $0! = 1$.
۱۵. ب) $\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$.
۱۶. $P(7,4) = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$.
۱۷. حروف: S(۳)، T(۳)، A(۱)، I(۲)، C(۱). کل ۱۰ حرف. $\frac{10!}{3! \times 3! \times 2!} = \frac{3628800}{72} = 50400$.
۱۸. ۲ نفر خاص را یک واحد در نظر بگیر: ۵ واحد. چیدمان دوری: $(5-1)! = 24$. حالت داخلی: ۲. کل: $24 \times 2 = 48$.
۱۹. $\binom{4}{2}\binom{6}{3} + \binom{4}{3}\binom{6}{2} + \binom{4}{4}\binom{6}{1} = 6 \times 20 + 4 \times 15 + 1 \times 6 = 120 + 60 + 6 = 186$.

۲۰. رقم اول فرد: ۵ انتخاب. ۴ رقم بعدی از ۸: $P(8,4) = 1680$. کل: $5 \times 1680 = 8400$.
۲۱. $3 \times 4 \times 2 = 24$.
۲۲. $P(12,2) \times \binom{10}{2} = 132 \times 45 = 5940$.
۲۳. ۳ نفر خاص را یک واحد: ۵ واحد. چیدمان دوری: $(5-1)! = 24$. حالت داخلی ۳ نفر: $3! = 6$. کل: $24 \times 6 = 144$.

۱۱.۹ منابع پیشنهادی

- پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. فصل ۶.
- رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. فصل ۶.
- نیکوکار، م. (۱۳۹۷). *ریاضیات عمومی*. فصل ۶.
- T. S. Tan، (۲۰۱۹). *Applied Mathematics for the Managerial، Social and Life Sci- ences*. Ch. ۶.
- A. S. Salzman، (۲۰۱۷). *Mathematics for Business*. Ch. ۶.
- E. Ummer، (۲۰۱۸). *Basic Mathematics for Economics، Finance and Business*. Ch. ۶.

ایست بازرسی

پایان فصل ۶ — نسخه توسعه‌یافته
آمار: ~۲۰ صفحه A۴ | ۱۸ مثال حل‌شده | ۲۳ سوال | ۶ منبع

xcolor enumitem booktabs geometry amsmath،amssymb،amsthm [۱۲pt،a۴paper]article
xepersian hyperref tcolorbox
margin=۲.۵cm
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)
فصل ۷: آنالیز ترکیبی (نسخه توسعه‌یافته) تیم ۵ نفره معمار آموزشی ۱۳ مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۱۰ فصل ۷: آنالیز ترکیبی (نسخه توسعه‌یافته — حجم دوبرابر)

۱.۱۰ چکیده

در فصل قبل با اصول شمارش، جایگشت و فاکتوریل آشنا شدی. حالا وقت آن است که با «ترکیب» آشنا شوی — ابزار قدرتمندی که وقتی «ترتیب مهم نیست» به کار می‌آید. ترکیب، پایه‌ای برای قضیه دوجمله‌ای، مثلث پاسکال، و بسیاری از مسائل مدیریتی است. در این فصل، ترکیب، خواص آن، اتحادهای ترکیبیاتی، قضیه دوجمله‌ای، مثلث پاسکال، و کاربردهای گسترده مدیریتی را می‌آموزی. هدف نهایی: بتوانی هر مسئله «انتخاب بدون ترتیب» را حل کنی و در مسائل پیچیده‌تر، از اتحادهای ترکیبیاتی بهره ببری.

۲.۱۰ اهداف یادگیری

- **تعریف کند:** ترکیب، ضریب دوجمله‌ای، مثلث پاسکال، اتحاد ترکیبیاتی.
- **محاسبه کند:** $\binom{n}{r}$، بسط دوجمله‌ای، جملات خاص.
- **تحلیل کند:** خواص ترکیب، تقارن، اتحاد پاسکال.
- **اثبات کند:** اتحادهای ترکیبیاتی با استدلال ترکیبیاتی و جبری.
- **مدل‌سازی کند:** انتخاب تیم، تخصیص منابع، تحلیل احتمال، بسط عبارات.
- **ارزیابی کند:** کدام روش (ترکیب یا جایگشت) برای مسئله مناسب‌تر است.

۳.۱۰ مقدمه طنز

تصور کن یک مدیر می‌خواهد از بین ۱۰ کارمند، یک تیم ۳ نفره برای پروژه انتخاب کند. اگر بلد نباشد از ترکیب استفاده کند، ممکن است ساده‌لوحانه بگوید «۱۰ × ۹ × ۸ = ۷۲۰ راه» — در حالی که پاسخ واقعی ۱۲۰ راه است! چرا؟ چون در تیم ۳ نفره، ترتیب مهم نیست: تیم علی، رضا، حسن با تیم حسن، علی، رضا یکی است. این تفاوت ۶۰۰ راهی، همان تفاوت جایگشت و ترکیب است.

ترکیب مثل «انتخاب تیم فوتبال» است: مهم نیست کی اول انتخاب شد، مهم این است که چه کسانی در تیم هستند. جایگشت مثل «چیدن مدال طلا، نقره، برنز» است: مهم است کی اول شد، کی دوم، کی سوم.

نکته طنزآمیز ماجرا اینجاست: بسیاری از افراد فکر می‌کنند «ترکیب و جایگشت یکی هستند» و اشتباهاً از فرمول اشتباه استفاده می‌کنند. اما در دنیای مدیریت، این اشتباه می‌تواند به تصمیم‌گیری غلط منجر شود — مثلاً انتخاب تیم ۳ نفره از ۱۰ نفر به‌جای ۱۲۰ راه، ۷۲۰ راه حساب شود و بودجه‌ریزی اشتباه شود. پس این فصل، تو را از «اشتباه رایج» به «دقت ترکیبیاتی» می‌برد.

۴.۱۰ مفاهیم اصلی

۱.۴.۱۰ مفهوم ۱: ترکیب — تعریف و شهود

تعریف: ترکیب r شیء از n شیء متمایز، تعداد راه‌های انتخاب r شیء بدون اهمیت ترتیب است:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

شهود: ترکیب یعنی «چه کسانی انتخاب شوند»، نه «به چه ترتیبی».

تفاوت بنیادین با جایگشت:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \text{(ترتیب مهم)} \tag{۷۲}$$

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \text{(ترتیب مهم نیست)} \tag{۷۳}$$

رابطه بین جایگشت و ترکیب:

$$P(n,r) = r! \times C(n,r)$$

یعنی برای هر ترکیب r نفره، $r!$ جایگشت وجود دارد.
مثال عددی: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\times 3!} = \frac{120}{2\times 6} = 10$.
مثال ساده: از ۵ کتاب، چند راه برای انتخاب ۲ کتاب (بدون اهمیت ترتیب)؟

$$\binom{5}{2} = 10$$

مثال مدیریتی: از ۱۰ کارمند، چند تیم ۳ نفره می‌توان تشکیل داد؟

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \times 7!} = 120$$

۲.۴.۱۰ مفهوم ۲: خواص ترکیب

خاصیت ۱ — تقارن:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

اثبات:

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r} \quad \blacksquare$$

تفسیر شهودی: انتخاب r شیء از n شیء، مثل کنار گذاشتن $n-r$ شیء است.
مثال: $\binom{10}{3} = \binom{10}{7} = 120$.
خاصیت ۲ — مقادیر خاص:

$$\binom{n}{0} = 1 \tag{۷۴}$$

$$\binom{n}{1} = n \tag{۷۵}$$

$$\binom{n}{n} = 1 \tag{۷۶}$$

$$\binom{n}{n-1} = n \tag{۷۷}$$

خاصیت ۳ — اتحاد پاسکال:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

اثبات جبری:

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} \tag{۷۸}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \cdot \frac{r}{r} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} \cdot \frac{n-r}{n-r} \tag{۷۹}$$

$$= \frac{r(n-1)! + (n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!} \tag{۸۰}$$

$$= \frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r} \quad \blacksquare \tag{۸۱}$$

تفسیر ترکیبیاتی: برای انتخاب r نفر از n نفر، یک نفر خاص را در نظر بگیر. یا او در تیم است (انتخاب $r-1$ نفر از $n-1$ نفر باقی‌مانده)، یا نیست (انتخاب r نفر از $n-1$ نفر باقی‌مانده).

خاصیت ۴ — جمع ضرایب:

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$$

تفسیر: تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی 2^n است. هر زیرمجموعه به‌اندازه r عضو دارد و $\binom{n}{r}$ راه برای انتخاب آن وجود دارد.

خاصیت ۵ — جمع متناوب:

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} = 0$$

۳.۴.۱۰ مفهوم ۳: قضیه دوجمله‌ای (Binomial Theorem)

تعریف: برای هر عدد طبیعی n و هر a و b:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

بسط صریح:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

شهود: ضریب هر جمله، تعداد راه‌های انتخاب r تا از bها از بین n پرانتز است.

مثال ساده:

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{۸۲}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{۸۳}$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \tag{۸۴}$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \tag{۸۵}$$

جمله عمومی:

$$T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

مثال عددی: $(2x+3)^4$. جمله x^2 را بیاب.

$$T_3 = \binom{4}{2}(2x)^2(3)^2 = 6 \times 4x^2 \times 9 = 216x^2$$

مثال مدیریتی: در یک شرکت، احتمال موفقیت هر پروژه ۰.۷ است. اگر ۵ پروژه مستقل داشته باشیم، احتمال موفقیت دقیقاً ۳ پروژه:

$$\binom{5}{3}(0.7)^3(0.3)^2 = 10 \times 0.343 \times 0.09 = 0.3087$$

۴.۴.۱۰ مفهوم ۴: مثلث پاسکال

تعریف: آرایه‌ای مثلثی از ضرایب دوجمله‌ای که با اتحاد پاسکال ساخته می‌شود:

۱
۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱
۱ ۴ ۶ ۴ ۱
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

روش ساخت: هر عدد، حاصل‌جمع دو عدد بالای آن است.
خواص مثلث پاسکال:

- سطر nـام شامل $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ است.
- مجموع سطر nـام برابر 2^n است.
- اعداد ابتدا و انتهای هر سطر ۱ هستند.
- مثلث متقارن است.
- اعداد سطر سوم به بعد، اعداد مثلثی، چهاروجهی و ... را می‌سازند.

مثال: سطر ۵: ۱، ۵، ۱۰، ۱۰، ۵، ۱. مجموع: $1+5+10+10+5+1 = 32 = 2^5$.

۵.۴.۱۰ مفهوم ۵: اتحادهای ترکیبیاتی مهم

اتحاد ۱ — واندرموند:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$$

تفسیر: انتخاب r شیء از $m+n$ شیء، معادل انتخاب k شیء از m و $r-k$ شیء از n است.
اتحاد ۲ — جمع مربعات:

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2 = \binom{2n}{n}$$

اتحاد ۳ — اتحاد چو:

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$$

اتحاد ۴ — جمع با وزن:

$$\sum_{r=0}^{n} r\binom{n}{r} = n \cdot 2^{n-1}$$

۶.۴.۱۰ مفهوم ۶: ترکیب با تکرار

تعریف: تعداد راه‌های انتخاب r شیء از n نوع شیء (با تکرار مجاز، بدون اهمیت ترتیب):

$$\binom{n+r-1}{r}$$

شهود: مثل تقسیم r توپ یکسان در n سبد متمایز است.
مثال ساده: چند راه برای خرید ۳ بستنی از ۴ طعم مختلف (با تکرار مجاز)؟

$$\binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20$$

مثال مدیریتی: یک مدیر می‌خواهد ۱۰ واحد بودجه را بین ۴ دپارتمان تقسیم کند. چند راه ممکن است؟

$$\binom{4+10-1}{10} = \binom{13}{10} = \binom{13}{3} = 286$$

۷.۴.۱۰ مفهوم ۷: کاربرد در احتمال

تعریف احتمال ترکیبیاتی:

$$P(A) = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌ها}}$$

مثال مدیریتی: از ۱۰ محصول، ۳ محصول معیوب است. اگر ۴ محصول تصادفی انتخاب کنیم، احتمال اینکه دقیقاً ۱ محصول معیوب باشد:

$$P = \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{3 \times 35}{210} = \frac{105}{210} = 0.5$$

۸.۴.۱۰ مفهوم ۸: کاربرد در تخصیص منابع

مثال مدیریتی: یک شرکت ۵ پروژه و ۳ تیم دارد. اگر هر پروژه به یک تیم تخصیص یابد، چند راه ممکن است؟

$$3^5 = 243$$

اگر هر تیم حداکثر یک پروژه بگیرد:

$$P(5,3) = 60$$

اگر ترتیب مهم نباشد و هر تیم حداکثر یک پروژه:

$$\binom{5}{3} = 10$$

۵.۱۰ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: محاسبه ترکیب
صورت مسئله: $\binom{8}{3}$ را حساب کن.
مرحله ۱: $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!}$.
مرحله ۲: $= \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = \frac{336}{6} = 56$.
نتیجه: ۵۶.

مثال حل‌شده

مثال ۲: خاصیت تقارن
صورت مسئله: نشان بده $\binom{12}{8} = \binom{12}{4}$.
مرحله ۱: $\binom{12}{4} = \frac{12!}{4! \times 8!}$.
مرحله ۲: $\binom{12}{8} = \frac{12!}{8! \times 4!}$.
مرحله ۳: هر دو برابرند.
نتیجه: $\binom{12}{4} = \binom{12}{8} = 495$.

مثال حل‌شده

مثال ۳: اتحاد پاسکال
صورت مسئله: $\binom{7}{3}$ را با اتحاد پاسکال حساب کن.
مرحله ۱: $\binom{7}{3} = \binom{6}{2} + \binom{6}{3}$.
مرحله ۲: $\binom{6}{2} = 15$، $\binom{6}{3} = 20$.
مرحله ۳: $15 + 20 = 35$.
نتیجه: ۳۵.

مثال حل‌شده

مثال ۴: بسط دوجمله‌ای
صورت مسئله: $(x+2)^5$ را بسط بده.
مرحله ۱: طبق قضیه دوجمله‌ای:

$$(x+2)^5 = \sum_{r=0}^{5} \binom{5}{r} x^{5-r} 2^r$$

مرحله ۲:

$$= \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4 \cdot 2 + \binom{5}{2}x^3 \cdot 4 + \binom{5}{3}x^2 \cdot 8 + \binom{5}{4}x \cdot 16 + \binom{5}{5} \cdot 32 \quad (۸۶)$$

$$= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32 \quad (۸۷)$$

نتیجه: $x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$.

مثال حل‌شده

مثال ۵: جمله خاص در بسط
صورت مسئله: در بسط $(3x-2)^6$، ضریب x^4 را بیاب.
مرحله ۱: جمله عمومی: $T_{r+1} = \binom{6}{r}(3x)^{6-r}(-2)^r$.
مرحله ۲: برای x^4: $6 - r = 4 \Rightarrow r = 2$.
مرحله ۳: $T_3 = \binom{6}{2}(3x)^4(-2)^2 = 15 \times 81x^4 \times 4 = 4860x^4$.
نتیجه: ضریب $= 4860$.

مثال حل‌شده

مثال ۶: انتخاب تیم
صورت مسئله: از ۱۲ کارمند، چند تیم ۵ نفره می‌توان تشکیل داد؟
مرحله ۱: ترتیب مهم نیست.
مرحله ۲: $\binom{12}{5} = \frac{12!}{5!\times 7!} = 792$.
نتیجه: ۷۹۲ تیم.

مثال حل‌شده

مثال ۷: انتخاب با شرط
صورت مسئله: از ۱۰ کارمند (۶ آقا، ۴ خانم)، چند تیم ۴ نفره با دقیقاً ۲ خانم؟
مرحله ۱: انتخاب ۲ خانم از ۴: $\binom{4}{2} = 6$.
مرحله ۲: انتخاب ۲ آقا از ۶: $\binom{6}{2} = 15$.
مرحله ۳: طبق اصل ضرب: $6 \times 15 = 90$.
نتیجه: ۹۰ تیم.

مثال حل‌شده

مثال ۸: احتمال ترکیبیاتی
صورت مسئله: از ۱۵ محصول، ۴ معیوب است. اگر ۵ محصول تصادفی انتخاب کنیم، احتمال اینکه ۲ معیوب باشد؟
مرحله ۱: کل حالت‌ها: $\binom{15}{5} = 3003$.
مرحله ۲: حالت‌های مطلوب: $\binom{4}{2}\binom{11}{3} = 6 \times 165 = 990$.
مرحله ۳: $P = 990/3003 \approx 0.3297$.
نتیجه: حدود ۳۳.۰.

مثال حل‌شده

مثال ۹: ترکیب با تکرار
صورت مسئله: یک مدیر می‌خواهد ۸ واحد بودجه را بین ۳ دپارتمان تقسیم کند. چند راه ممکن است؟
مرحله ۱: فرمول: $\binom{n+r-1}{r}$ با $n = 3$، $r = 8$.
مرحله ۲: $\binom{3+8-1}{8} = \binom{10}{8} = \binom{10}{2} = 45$.
نتیجه: ۴۵ راه.

مثال حل‌شده

مثال ۱۰: انتخاب رئیس و تیم
صورت مسئله: از ۱۰ نفر، یک تیم ۴ نفره با یک رئیس انتخاب کن.
مرحله ۱: انتخاب رئیس: ۱۰ راه.
مرحله ۲: انتخاب ۳ نفر دیگر از ۹: $\binom{9}{3} = 84$.
مرحله ۳: $10 \times 84 = 840$.
نتیجه: ۸۴۰ راه.

مثال حل‌شده

مثال ۱۱: مثلث پاسکال
صورت مسئله: سطر ۶ مثلث پاسکال را بنویس.
مرحله ۱: $\binom{6}{0}=1$، $\binom{6}{1}=6$، $\binom{6}{2}=15$، $\binom{6}{3}=20$، $\binom{6}{4}=15$، $\binom{6}{5}=6$، $\binom{6}{6}=1$.
نتیجه: ۱، ۶، ۱۵، ۲۰، ۱۵، ۶، ۱. مجموع: $2^6=$ ۶۴.

مثال حل‌شده

مثال ۱۲: اثبات اتحاد
صورت مسئله: ثابت کن $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$.
مرحله ۱: $\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}$.
مرحله ۲: $\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)(n-2)!}{2\times(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2}$.
نتیجه: اثبات شد. ■

مثال حل‌شده

مثال ۱۳: کاربرد در رمزنگاری
صورت مسئله: یک رمز عبور ۸ کاراکتری داریم که شامل ۵ حرف و ۳ رقم است. اگر ترتیب مهم باشد و تکرار مجاز باشد، چند رمز ممکن است؟
مرحله ۱: انتخاب ۵ جایگاه از ۸ برای حروف: $\binom{8}{5}=56$.
مرحله ۲: پر کردن ۵ جایگاه با حروف: 26^5.
مرحله ۳: پر کردن ۳ جایگاه با ارقام: 10^3.
مرحله ۴: $56\times 26^5\times 10^3\approx 56\times 11881376\times 1000\approx 6.65\times 10^{11}$.
نتیجه: حدود ۶۶۵ میلیارد رمز.

مثال حل‌شده

مثال ۱۴: توزیع جوایز
صورت مسئله: در یک مسابقه ۲۰ نفر شرکت کرده‌اند. ۳ جایزه اول، دوم، سوم اهدا می‌شود. چند راه اهدای جوایز؟
مرحله ۱: ترتیب مهم است.
مرحله ۲: $P(20,3)=20\times 19\times 18=6840$.
نتیجه: ۶۸۴۰ راه.

مثال حل‌شده

مثال ۱۵: انتخاب کمیته
صورت مسئله: از ۱۵ نفر، یک کمیته ۵ نفره با یک رئیس و یک منشی انتخاب کن (رئیس و منشی نمی‌توانند یک نفر باشند).
مرحله ۱: انتخاب رئیس: ۱۵ راه.
مرحله ۲: انتخاب منشی از ۱۴ نفر: ۱۴ راه.
مرحله ۳: انتخاب ۳ نفر دیگر از ۱۳: $\binom{13}{3}=286$.
مرحله ۴: $15\times 14\times 286=60060$.
نتیجه: ۶۰،۰۶۰ راه.

مثال حل‌شده

مثال ۱۶: اتحاد واندرموند
صورت مسئله: با استفاده از اتحاد واندرموند، $\binom{7}{3}$ را حساب کن (با $m=4$، $n=3$).
مرحله ۱: $\binom{7}{3} = \sum_{k=0}^{3} \binom{4}{k}\binom{3}{3-k}$.
مرحله ۲:

$$= \binom{4}{0}\binom{3}{3} + \binom{4}{1}\binom{3}{2} + \binom{4}{2}\binom{3}{1} + \binom{4}{3}\binom{3}{0} \quad (۸۸)$$

$$= 1 \times 1 + 4 \times 3 + 6 \times 3 + 4 \times 1 \quad (۸۹)$$

$$= 1 + 12 + 18 + 4 = 35 \quad (۹۰)$$

نتیجه: ۳۵.

مثال حل‌شده

مثال ۱۷: انتخاب با محدودیت
صورت مسئله: از ۱۰ نفر، تیم ۴ نفره انتخاب کن که ۲ نفر خاص حتماً در تیم باشند.
مرحله ۱: ۲ نفر خاص ثابت هستند.
مرحله ۲: انتخاب ۲ نفر از ۸ نفر باقی‌مانده: $\binom{8}{2} = 28$.
نتیجه: ۲۸ تیم.

مثال حل‌شده

مثال ۱۸: انتخاب با محدودیت منفی
صورت مسئله: از ۱۰ نفر، تیم ۴ نفره انتخاب کن که ۲ نفر خاص حتماً در تیم نباشند.
مرحله ۱: ۲ نفر خاص حذف می‌شوند.
مرحله ۲: انتخاب ۴ نفر از ۸ نفر: $\binom{8}{4} = 70$.
نتیجه: ۷۰ تیم.

مثال حل‌شده

مثال ۱۹: بسط سه‌جمله‌ای
صورت مسئله: $(x+y+z)^3$ را بسط بده.
مرحله ۱: طبق بسط چندجمله‌ای:

$$(x+y+z)^3 = \sum \frac{3!}{n_1!n_2!n_3!} x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3}$$

که $n_1+n_2+n_3=3$.
مرحله ۲:

$$= x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3y^2x+3y^2z+3z^2x+3z^2y+6xyz \quad (۹۱)$$

نتیجه: بسط کامل.

مثال حل‌شده

مثال ۲۰: احتمال حداقل
صورت مسئله: از ۱۰ محصول (۳ معیوب)، ۴ محصول انتخاب می‌کنیم. احتمال حداقل ۱ معیوب؟
مرحله ۱: کل: $\binom{10}{4} = 210$.
مرحله ۲: بدون معیوب: $\binom{7}{4} = 35$.
مرحله ۳: حداقل ۱ معیوب: $210 - 35 = 175$.
مرحله ۴: $P = 175/210 \approx 0.833$.
نتیجه: حدود ۸۳٪.

۶.۱۰ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه ۱: استفاده از جایگشت به‌جای ترکیب.
راه پیشگیری: بپرس «آیا ترتیب مهم است؟»
اشتباه ۲: فراموش کردن تقسیم بر $r!$ در فرمول ترکیب.
راه پیشگیری: فرمول $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ را حفظ کن.
اشتباه ۳: اشتباه در محاسبه فاکتوریل.
راه پیشگیری: از ساده‌سازی کسری استفاده کن.
اشتباه ۴: فراموش کردن شرط $0 \le r \le n$.
راه پیشگیری: اگر $r > n$، ترکیب صفر است.
اشتباه ۵: اشتباه در علامت در بسط دوجمله‌ای.
راه پیشگیری: $(a-b)^n$: علامت‌ها یک‌درمیان مثبت و منفی.
اشتباه ۶: فراموش کردن ضرب در $\binom{n}{r}$ در مسائل چندمرحله‌ای.
راه پیشگیری: هر مرحله را جدا محاسبه و ضرب کن.
اشتباه ۷: اشتباه بین $\binom{n}{r}$ و $\binom{n+r-1}{r}$.
راه پیشگیری: اگر تکرار مجاز است، از فرمول دوم استفاده کن.

۷.۱۰ کاربرد در مدیریت

کاربرد مدیریتی

کاربرد ۱: انتخاب تیم پروژه
مدیران پروژه برای انتخاب اعضای تیم از ترکیب استفاده می‌کنند.
کاربرد ۲: تخصیص بودجه
تقسیم بودجه بین دپارتمان‌ها با ترکیب با تکرار مدل می‌شود.
کاربرد ۳: کنترل کیفیت
برای محاسبه احتمال وجود محصول معیوب در نمونه، از ترکیب استفاده می‌شود.
کاربرد ۴: تحلیل ریسک
تعداد سناریوهای ممکن برای شکست پروژه با ترکیب محاسبه می‌شود.
کاربرد ۵: برنامه‌ریزی تولید
انتخاب ترکیب محصولات برای تولید با محدودیت منابع.
کاربرد ۶: بازاریابی
انتخاب ترکیب مشتریان هدف برای کمپین.
کاربرد ۷: مالی
محاسبه تعداد سبدهای سرمایه‌گذاری ممکن از بین n سهم.

۸.۱۰ خلاصه فصل

مفهوم	فرمول	کاربرد
ترکیب	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$	انتخاب بدون ترتیب
تقارن	$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$	ساده‌سازی
اتحاد پاسکال	$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$	ساخت مثلث
جمع ضرایب	$\sum \binom{n}{r} = 2^n$	تعداد زیرمجموعه
دوجمله‌ای	$(a+b)^n = \sum \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$	بسط عبارات
ترکیب با تکرار	$\binom{n+r-1}{r}$	توزیع منابع
واندرموند	$\binom{m+n}{r} = \sum \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$	اتحاد

۹.۱۰ خودآزمایی

۱.۹.۱۰ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. $\binom{6}{2}$ چند است؟

آ) ۱۲

ب) ۱۵

ج) ۳۰

د) ۳۶

۲. $\binom{10}{0}$ چند است؟

آ) ۰

ب) ۱

ج) ۱۰

د) تعریف نشده

۳. $\binom{n}{1}$ برابر است با:

آ) ۱

ب) n

ج) $n!$

د) n^2

۴. ضریب x^3 در $(x+1)^5$:

آ) ۵

ب) ۱۰

ج) ۱۵

د) ۲۰

۵. سطر ۴ مثلث پاسکال:

آ) ۱، ۳، ۳، ۱

ب) ۱، ۴، ۶، ۴، ۱

ج) ۱، ۵، ۱۰، ۱۰، ۵، ۱

د) ۱، ۲، ۱

۶. $\binom{8}{3}$ چند است؟

آ) ۲۴

ب) ۵۶

ج) ۳۳۶

د) ۴۰۳۲۰

۷. از ۷ نفر، چند تیم ۳ نفره؟

آ) ۲۱

ب) ۳۵

ج) ۲۱۰

د) ۵۰۴۰

۸. $\sum_{r=0}^{4}\binom{4}{r}$ چند است؟

آ) ۸

ب) ۱۶

ج) ۳۲

د) ۶۴

۹. ضریب x^2y^3 در $(x+y)^5$:

آ) ۵

ب) ۱۰

ج) ۱۵

د) ۲۰

۱۰. $\binom{9}{7}$ برابر است با:

آ) $\binom{9}{2}$

ب) $\binom{9}{7} - 1$

ج) $\binom{9}{9}$

د) $\binom{9}{0}$

۱۱. ترکیب با تکرار: انتخاب ۴ شیء از ۳ نوع:

آ) ۱۵

ب) ۲۰

ج) ۳۵

د) ۸۱

۱۲. $(1+1)^5$ چند است؟

آ) ۵

ب) ۱۰

ج) ۳۲

د) ۱۲۰

۱۳. $\binom{5}{3} + \binom{5}{2}$ چند است؟

آ) ۱۰

ب) ۱۵

ج) ۲۰

د) ۲۵

۱۴. اگر $\binom{n}{2} = 15$، n چند است؟

آ) ۵

ب) ۶

ج) ۷

د) ۸

۱۵. تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از یک مجموعه ۷ عضوی:

آ) ۲۱

ب) ۳۵

ج) ۴۲

د) ۲۱۰

۲.۹.۱۰ تشریحی (۸ سوال)

۱۶. $\binom{12}{4}$ را حساب کن.
۱۷. $(2x-1)^4$ را بسط بده.
۱۸. ضریب x^3 در $(x+2)^6$ را بیاب.
۱۹. از ۱۲ کارمند (۷ آقا، ۵ خانم)، چند تیم ۵ نفره با دقیقاً ۳ آقا؟
۲۰. ثابت کن $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.
۲۱. ۱۰ واحد بودجه بین ۴ دپارتمان. چند راه توزیع؟
۲۲. از ۱۵ محصول (۴ معیوب)، ۵ محصول انتخاب. احتمال دقیقاً ۲ معیوب؟
۲۳. سطر ۷ مثلث پاسکال را بنویس و مجموع را حساب کن.

۱۰.۱۰ پاسخنامه تشریحی

۱. ب) $\binom{6}{2} = 15$.
۲. ب) $\binom{10}{0} = 1$.
۳. ب) $\binom{n}{1} = n$.
۴. ب) $\binom{5}{2} = 10$.
۵. ب) سطر ۴: ۱، ۴، ۶، ۴، ۱.
۶. ب) $\binom{8}{3} = 56$.
۷. ب) $\binom{7}{3} = 35$.
۸. ب) $2^4 = 16$.
۹. ب) $\binom{5}{3} = 10$.
۱۰. الف) $\binom{9}{2} = \binom{9}{7} = 36$.
۱۱. الف) $\binom{6}{4} = \binom{3+4-1}{4} = 15$.
۱۲. ج) $2^5 = 32$.
۱۳. ج) $10 + 10 = 20$.
۱۴. ب) $\frac{n(n-1)}{2} = 15 \Rightarrow n(n-1) = 30 \Rightarrow n = 6$.
۱۵. ب) $\binom{7}{3} = 35$.
۱۶. $\binom{12}{4} = \frac{12\times11\times10\times9}{24} = 495$.
۱۷. $(2x-1)^4 = 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$.

۱۸. $T_4 = \binom{6}{3}x^3 \cdot 2^3 = 20 \times 8x^3 = 160x^3$.

۱۹. $\binom{7}{3} \times \binom{5}{2} = 35 \times 10 = 350$.

۲۰. $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \binom{n}{n-r}$. ■

۲۱. $\binom{13}{3} = \binom{13}{10} = \binom{4+10-1}{10}$.

۲۲. $P = \frac{\binom{4}{2}\binom{11}{3}}{\binom{15}{5}} = \frac{6 \times 165}{3003} = \frac{990}{3003} \approx 0.3297$

۲۳. سطر ۷: ۱، ۷، ۲۱، ۳۵، ۳۵، ۲۱، ۷، ۱. مجموع: $2^7 = ۱۲۸$.

۱۱.۱۰ منابع پیشنهادی

- پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. فصل ۷.
- رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. فصل ۷.
- نیکوکار، م. (۱۳۹۷). *ریاضیات عمومی*. فصل ۷.
- T. S. Tan، (۲۰۱۹). *Applied Mathematics for the Managerial، Social and Life Sci-ences*. Ch. ۶.
- A. S. Salzman، (۲۰۱۷). *Mathematics for Business*. Ch. ۷.
- E. Ummer، (۲۰۱۸). *Basic Mathematics for Economics، Business and Finance*. Ch. ۷.

ایست بازرسی

پایان فصل ۷ — نسخه توسعه‌یافته
آمار: ~۲۲ صفحه A۴ | ۲۰ مثال حل‌شده | ۲۳ سوال | ۶ منبع

xcolor enumitem booktabs geometry amsmath،amssymb،amsthm [۱۲pt،a۴paper]article
xepersian hyperref tcolorbox
margin=۲.۵cm
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)
فصل ۸: دستگاه مختصات و نمودار (نسخه توسعه‌یافته) تیم ۵ نفره معمار آموزشی ۱۳ مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۱۱ فصل ۸: دستگاه مختصات و نمودار (نسخه توسعه‌یافته — حجم دوبرابر)

۱.۱۱ چکیده

نمودار، زبان بصری ریاضیات است. در مدیریت، یک نمودار خوب می‌تواند در چند ثانیه چیزی را نشان دهد که چند صفحه متن از بیانش عاجز است. در این فصل، دستگاه مختصات دکارتی، فاصله بین دو نقطه، نقطه میانی، شیب، معادله خط، رسم نمودار توابع مختلف، تبدیلات نموداری، و کاربردهای گسترده مدیریتی را می‌آموزی. هدف نهایی: بتوانی هر پدیده مدیریتی را به‌صورت بصری مدل کنی و از نمودار برای تحلیل و تصمیم‌گیری استفاده کنی.

۲.۱۱ اهداف یادگیری

- **تعریف کند:** دستگاه مختصات دکارتی، ربع‌ها، فاصله، نقطه میانی، شیب، عرض از مبدأ.
- **محاسبه کند:** فاصله دو نقطه، نقطه میانی، شیب، معادله خط.
- **رسم کند:** نمودار توابع خطی، درجه دوم، نمایی، لگاریتمی، قدر مطلق، پله‌ای.
- **تحلیل کند:** تبدیلات نموداری (انتقال، انعکاس، کشش).
- **مدل‌سازی کند:** مسائل مدیریتی با نمودار (نقطه سربه‌سر، تعادل بازار، بهینه‌سازی).
- **ارزیابی کند:** کدام نوع نمودار برای کدام داده مناسب‌تر است.

۳.۱۱ مقدمه طنز

تصور کن یک مدیر می‌خواهد در جلسه هیئت‌مدیره، عملکرد فروش ۱۲ ماه گذشته را ارائه دهد. اگر فقط جدول اعداد را نشان دهد، احتمالاً نصف حاضرین چرت می‌زنند. اما اگر یک نمودار خطی ساده بکشد، همه در یک نگاه می‌فهمند که فروش در کدام ماه‌ها بالا و در کدام ماه‌ها پایین بوده. این قدرت بصری‌سازی است.

دستگاه مختصات مثل «نقشه گنج» است: هر نقطه، یک موقعیت خاص دارد که با دو عدد (مختصات x و y) مشخص می‌شود. اگر بلد باشی این نقشه را بخوانی، می‌توانی هر رابطه‌ای را ببینی و تحلیل کنی.

نکته طنزآمیز ماجرا اینجاست: بسیاری از افراد فکر می‌کنند «نمودار فقط یک شکل تزئینی است» و به آن اهمیت نمی‌دهند. اما در دنیای مدیریت، نمودار می‌تواند تفاوت بین یک تصمیم درست و یک فاجعه مالی باشد. مثلاً اگر مدیر نداند که تابع سود سهمی است، ممکن است با افزایش تولید، به‌جای سود بیشتر، ضرر کند — چون از رأس سهمی گذشته است. این فصل، تو را از «کوری داده» به «بینایی بصری» می‌برد.

۴.۱۱ مفاهیم اصلی

۱.۴.۱۱ مفهوم ۱: دستگاه مختصات دکارتی

تعریف: دستگاه مختصات دکارتی از دو محور عمود بر هم تشکیل شده:

- **محور افقی (x):** محور طول‌ها. (Abscissa)
- **محور عمودی (y):** محور عرض‌ها. (Ordinate)
- **مبدأ:** نقطه $(0,0)$ که دو محور تلاقی می‌کنند.

هر نقطه در صفحه، با یک زوج مرتب (x, y) مشخص می‌شود:

- x: فاصله افقی از محور y (با علامت).

ربع	علامت x	علامت y	مثال
اول (I)	$+$	$+$	$(3,4)$
دوم (II)	$-$	$+$	$(-3,4)$
سوم (III)	$-$	$-$	$(-3,-4)$
چهارم (IV)	$+$	$-$	$(3,-4)$

- y: فاصله عمودی از محور x (با علامت).

چهار ربع :(Quadrants)

نقاط روی محورها:

- روی محور x: $y=0$، مثل $(5,0)$.
- روی محور y: $x=0$، مثل $(0,5)$.
- مبدأ: $(0,0)$.

مثال مدیریتی: در یک نمودار محصول–بازار، محور x می‌تواند «قیمت» و محور y «تقاضا» باشد. هر نقطه (P,Q) یک ترکیب قیمت–تقاضا را نشان می‌دهد.

۲.۴.۱۱ مفهوم ۲: فاصله بین دو نقطه

فرمول فاصله: فاصله بین دو نقطه $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

شهود: این فرمول از قضیه فیثاغورس می‌آید. اگر خطی بین دو نقطه بکشی، یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع Δx و Δy می‌سازی.

اثبات: در مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع $\Delta x=x_2-x_1$ و $\Delta y=y_2-y_1$، وتر d است:

$$d^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2 \Rightarrow d=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \quad \blacksquare$$

مثال ساده: فاصله بین $(1,2)$ و $(4,6)$:

$$d=\sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

مثال مدیریتی: یک شرکت دو انبار در مختصات $(10,20)$ و $(40,60)$ (کیلومتر) دارد. فاصله مستقیم:

$$d=\sqrt{30^2+40^2}=\sqrt{900+1600}=\sqrt{2500}=50 \text{ کیلومتر}$$

۳.۴.۱۱ مفهوم ۳: نقطه میانی

فرمول نقطه میانی: نقطه وسط بین $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$:

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

شهود: میانگین مختصات دو نقطه.

مثال ساده: وسط $(2,4)$ و $(6,8)$:

$$M=\left(\frac{2+6}{2},\frac{4+8}{2}\right)=(4,6)$$

مثال مدیریتی: اگر دو شعبه در مختصات $(10,30)$ و $(50,70)$ باشند، بهترین مکان برای انبار مرکزی (نقطه میانی):

$$M=(30,50)$$

۴.۴.۱۱ مفهوم ۴: شیب

تعریف: شیب خط، میزان «تندی» تغییر y نسبت به x است:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

انواع شیب:

- $m > 0$: خط صعودی.
- $m < 0$: خط نزولی.
- $m = 0$: خط افقی.
- m تعریف نشده: خط عمودی (چون $\Delta x = 0$).

تفسیر مدیریتی شیب: شیب = «نرخ تغییر». مثلاً اگر تابع هزینه $C(q) = 5q + 100$، شیب ۵ یعنی «هر واحد اضافه، هزینه را ۵ واحد افزایش می‌دهد».

مثال ساده: شیب خطی که از $(1, 3)$ و $(4, 9)$ می‌گذرد:

$$m = \frac{9 - 3}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$$

مثال مدیریتی: اگر فروش در ماه اول ۱۰۰ میلیون و در ماه سوم ۱۸۰ میلیون باشد، نرخ رشد ماهانه:

$$m = \frac{180 - 100}{3 - 1} = 40 \text{ میلیون در ماه}$$

۵.۴.۱۱ مفهوم ۵: معادله خط

اشکال مختلف معادله خط:

فرم	معادله
شیب‌ـعرض	$y = mx + b$
نقطه‌ـشیب	$y - y_1 = m(x - x_1)$
دو نقطه‌ای	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$
استاندارد	$Ax + By = C$

مثال ساده: خطی با شیب ۳ که از $(2, 5)$ می‌گذرد:

$$y - 5 = 3(x - 2) \Rightarrow y = 3x - 1$$

مثال مدیریتی: هزینه تولید ۱۰ واحد ۲۰۰ و ۲۰ واحد ۳۰۰. تابع هزینه خطی:

$$m = \frac{300 - 200}{20 - 10} = 10, \quad C - 200 = 10(q - 10) \Rightarrow C = 10q + 100$$

نکته: عرض از مبدأ ($b = 100$) در مدیریت همان «هزینه ثابت» است.

۶.۴.۱۱ مفهوم ۶: رسم نمودار توابع

روش رسم: برای هر تابع، کافی است چند نقطه را حساب کنی و به هم وصل کنی.

۱. **تابع خطی** $f(x) = ax + b$: یک خط راست. با دو نقطه رسم می‌شود.
۲. **تابع درجه دوم** $f(x) = ax^2 + bx + c$: یک سهمی. با رأس، ریشه‌ها و چند نقطه رسم می‌شود.
۳. **تابع نمایی** $f(x) = a^x$:

- اگر $a > 1$: صعودی با مجانب افقی $y = 0$ در سمت چپ.
- اگر $0 < a < 1$: نزولی.
- همیشه از $(0, 1)$ می‌گذرد.

۴. **تابع لگاریتمی** $f(x) = \log_a x$:

- دامنه $x > 0$.
- همیشه از $(1, 0)$ می‌گذرد.
- مجانب عمودی $x = 0$.

۵. **تابع قدر مطلق** $f(x) = |x|$: شکل V.
۶. **تابع پله‌ای:** ثابت در بازه‌ها با پرش در نقاط خاص.

مثال مدیریتی: رسم نمودار تابع سود $P(q) = -2q^2 + 40q - 100$:

- رأس: $(10, 100)$ ⟵ حداکثر سود.
- ریشه‌ها: $q \approx 2.93$ و $q \approx 17.07$ ⟵ نقاط سربه‌سر.

۷.۴.۱۱ مفهوم ۷: تبدیلات نموداری

انواع تبدیلات:

تبدیل	اثر
$f(x) + c$	انتقال عمودی ($c > 0$: بالا)
$f(x) - c$	انتقال عمودی ($c > 0$: پایین)
$f(x - c)$	انتقال افقی ($c > 0$: راست)
$f(x + c)$	انتقال افقی ($c > 0$: چپ)
$-f(x)$	انعکاس نسبت به محور x
$f(-x)$	انعکاس نسبت به محور y
$af(x)$	کشش/فشردگی عمودی
$f(ax)$	کشش/فشردگی افقی

مثال: $f(x) = x^2$ و $g(x) = (x - 2)^2 + 3$. نمودار g همان سهمی f است که ۲ واحد به راست و ۳ واحد به بالا منتقل شده.

۸.۴.۱۱ مفهوم ۸: رسم توابع خطی با محدودیت

در مدیریت، دامنه توابع اغلب محدود است:

- قیمت $P \geq 0$.
- تقاضا $Q \geq 0$.
- تعداد کارمند $L \geq 0$ و صحیح.

مثال مدیریتی: تابع تقاضا $Q = 500 - 10P$ فقط برای $P \in [0, 50]$ معنی دارد، چون خارج از این بازه، تقاضا منفی می‌شود.

۹.۴.۱۱ مفهوم ۹: رسم توابع چندناحیه‌ای

مثال مدیریتی: تابع تعرفه برق:

$$C(x) = \begin{cases} 0.5x & 0 \leq x \leq 100 \\ 50 + 0.8(x - 100) & 100 < x \leq 200 \\ 130 + 1.2(x - 200) & x > 200 \end{cases}$$

نمودار این تابع، سه پاره‌خط با شیب‌های مختلف است.

۱۰.۴.۱۱ مفهوم ۱۰: تحلیل بصری در مدیریت

کاربردهای کلیدی:

۱. **نقطه سربه‌سر:** تقاطع درآمد و هزینه.

۲. **تعادل بازار:** تقاطع عرضه و تقاضا.

۳. **بهینه‌سازی:** رأس سهمی سود.

۴. **تحلیل روند:** شیب خط رگرسیون.

۵. **مقایسه سناریوها:** چند نمودار روی یک محور.

۵.۱۱ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: فاصله
صورت مسئله: فاصله بین $(2, 3)$ و $(8, 11)$.
مرحله ۱: $\Delta x = 6$، $\Delta y = 8$.
مرحله ۲: $d = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$.
نتیجه: ۱۰.

مثال حل‌شده

مثال ۲: نقطه میانی
صورت مسئله: وسط بین $(-2,5)$ و $(6,-1)$.
مرحله ۱: $M_x = (-2+6)/2 = 2$.
مرحله ۲: $M_y = (5-1)/2 = 2$.
نتیجه: $(2,2)$.

مثال حل‌شده

مثال ۳: شیب
صورت مسئله: شیب خطی که از $(3,7)$ و $(7,15)$ می‌گذرد.
مرحله ۱: $m = (15-7)/(7-3) = 8/4 = 2$.
نتیجه: ۲.

مثال حل‌شده

مثال ۴: معادله خط
صورت مسئله: خطی با شیب -3 که از $(1,5)$ می‌گذرد.
مرحله ۱: $y - 5 = -3(x-1)$.
مرحله ۲: $y = -3x + 8$.
نتیجه: $y = -3x + 8$.

مثال حل‌شده

مثال ۵: تابع هزینه
صورت مسئله: هزینه تولید ۲۰ واحد ۵۰۰ و ۴۰ واحد ۹۰۰. تابع هزینه خطی.
مرحله ۱: $m = (900-500)/(40-20) = 400/20 = 20$.
مرحله ۲: $C - 500 = 20(q-20) \Rightarrow C = 20q + 100$.
نتیجه: هزینه ثابت ۱۰۰، متغیر ۲۰.

مثال حل‌شده

مثال ۶: نقطه سربه‌سر با نمودار
صورت مسئله: $R(q) = 30q$، $C(q) = 15q + 150$. نقطه سربه‌سر.
مرحله ۱: $30q = 15q + 150 \Rightarrow q = 10$.
مرحله ۲: $R(10) = 300$.
نتیجه: $(10, 300)$.

مثال حل‌شده

مثال ۷: تبدیل نمودار
صورت مسئله: اگر $f(x) = x^2$، نمودار $g(x) = (x+1)^2 - 2$.
مرحله ۱: انتقال افقی: ۱ واحد چپ.
مرحله ۲: انتقال عمودی: ۲ واحد پایین.
نتیجه: رأس در $(-1,-2)$.

مثال حل‌شده

مثال ۸: رأس سهمی
صورت مسئله: $P(q) = -3q^2 + 60q - 100$. رأس.
مرحله ۱: $q^* = -60/(2 \times -3) = 10$.
مرحله ۲: $P(10) = -300 + 600 - 100 = 200$.
نتیجه: رأس $(10, 200)$.

مثال حل‌شده

مثال ۹: تابع پله‌ای
صورت مسئله: تعرفه اشتراک اینترنت: تا ۱۰ گیگ ۵۰ هزار؛ ۱۰ تا ۳۰ گیگ هر گیگ ۳ هزار؛ بیش از ۳۰ گیگ هر گیگ ۵ هزار. هزینه ۴۰ گیگ.
مرحله ۱: ۵۰ + ۲۰ × ۳ = ۱۱۰ (برای ۳۰ گیگ).
مرحله ۲: ۱۰ گیگ اضافه × ۵ = ۵۰.
مرحله ۳: کل = ۱۶۰.
نتیجه: ۱۶۰ هزار تومان.

مثال حل‌شده

مثال ۱۰: تقاطع دو خط
صورت مسئله: خطوط $y = 2x + 1$ و $y = -x + 7$. نقطه تقاطع.
مرحله ۱: $2x + 1 = -x + 7 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$.
مرحله ۲: $y = 2(2) + 1 = 5$.
نتیجه: $(2, 5)$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۱: نمودار تابع نمایی
صورت مسئله: $f(t) = 100e^{0.1t}$. مقادیر در $t = 0, 5, 10, 20$.
مرحله ۱: $f(0) = 100$.
مرحله ۲: $f(5) = 100e^{0.5} \approx 164.9$.
مرحله ۳: $f(10) = 100e^{1} \approx 271.8$.
مرحله ۴: $f(20) = 100e^{2} \approx 738.9$.
نتیجه: رشد انفجاری.

مثال حل‌شده

مثال ۱۲: نمودار لگاریتمی
صورت مسئله: $U(x) = 50\ln(x + 1)$. مقادیر در $x = 0, 1, 10, 100$.
مرحله ۱: $U(0) = 0$.
مرحله ۲: $U(1) = 50\ln 2 \approx 34.7$.
مرحله ۳: $U(10) = 50\ln 11 \approx 119.9$.
مرحله ۴: $U(100) = 50\ln 101 \approx 230.8$.
نتیجه: رشد کند (مطلوبیت نهایی نزولی).

مثال حل‌شده

مثال ۱۳: نمودار قدر مطلق
صورت مسئله: $f(x) = |x - 3|$. مقادیر در $x = 0, 3, 6$.
مرحله ۱: $f(0) = 3$.
مرحله ۲: $f(3) = 0$.
مرحله ۳: $f(6) = 3$.
نتیجه: شکل V با رأس در $(3, 0)$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۴: تحلیل بصری
صورت مسئله: تابع درآمد $R(q) = 40q - q^2$ و هزینه $C(q) = 20q + 50$. از نمودار، نقطه سربه‌سر و حداکثر سود را تخمین بزن.
مرحله ۱: $P(q) = -q^2 + 20q - 50$.
مرحله ۲: رأس: $q^* = 10$، $P(10) = 50$.
مرحله ۳: ریشه‌ها: $\Delta = 400 - 200 = 200$، $q \approx 2.93$ و $q \approx 17.07$.
نتیجه: سربه‌سر در $q \approx 3$ و $q \approx 17$؛ حداکثر سود ۵۰ در $q = 10$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۵: بهینه‌سازی با نمودار
صورت مسئله: یک شرکت می‌خواهد حداقل هزینه را پیدا کند. $C(q) = q^2 - 20q + 200$.
مرحله ۱: $q^* = 10$.
مرحله ۲: $C(10) = 100 - 200 + 200 = 100$.
نتیجه: حداقل هزینه ۱۰۰ در $q = 10$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۶: تعادل عرضه و تقاضا
صورت مسئله: تقاضا $Q_d = 100 - 2P$، عرضه $Q_s = 3P - 20$. تعادل.
مرحله ۱: $100 - 2P = 3P - 20 \Rightarrow 5P = 120 \Rightarrow P = 24$.
مرحله ۲: $Q = 100 - 48 = 52$.
نتیجه: تعادل در $(24, 52)$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۷: مقایسه سناریو
صورت مسئله: یک شرکت دو سناریو دارد: $C_1(q) = 50q + 1000$ و $C_2(q) = 30q + 3000$. برای چه q، سناریو ۲ بهتر است؟
مرحله ۱: $30q + 3000 < 50q + 1000 \Rightarrow 2000 < 20q \Rightarrow q > 100$.
نتیجه: برای $q > 100$، سناریو ۲ ارزان‌تر است.

مثال حل‌شده

مثال ۱۸: نمودار تابع جزء صحیح
صورت مسئله: $f(x) = \lfloor x \rfloor$. مقادیر در $x = 1.5, 2.7, -0.5$.
مرحله ۱: $f(1.5) = 1$.
مرحله ۲: $f(2.7) = 2$.
مرحله ۳: $f(-0.5) = -1$.
نتیجه: نمودار پله‌ای.

مثال حل‌شده

مثال ۱۹: نمودار تابع زوج و فرد
صورت مسئله: $f(x) = x^3$ و $g(x) = x^2$ را رسم کن.
مرحله ۱: f فرد است ⟵ متقارن نسبت به مبدأ.
مرحله ۲: g زوج است ⟵ متقارن نسبت به محور y.
نتیجه: تقارن‌های متفاوت.

مثال حل‌شده

مثال ۲۰: رسم تابع چندناحیه‌ای
صورت مسئله: تابع حقوق $S(x)$:

$$S(x) = \begin{cases} 5 & 0 \le x \le 100 \\ 5 + 0.02(x - 100) & x > 100 \end{cases}$$

که x فروش (میلیون) و S حقوق (میلیون). حقوق در فروش ۱۵۰ میلیون.
مرحله ۱: $S(150) = 5 + 0.02(50) = 5 + 1 = 6$.
نتیجه: ۶ میلیون تومان.

۶.۱۱ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه ۱: اشتباه در علامت مختصات ربع‌ها.
راه پیشگیری: ربع اول همه مثبت، بقیه به‌ترتیب علامت‌ها تغییر می‌کنند.
اشتباه ۲: فراموش کردن جذر در فرمول فاصله.
راه پیشگیری: $d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.
اشتباه ۳: اشتباه در ترتیب تفریق در شیب.
راه پیشگیری: یک ترتیب را حفظ کن: «دوم منهای اول».
اشتباه ۴: فراموش کردن شرط دامنه در رسم توابع.
راه پیشگیری: قیمت، تقاضا و مقدار منفی معنی ندارند.
اشتباه ۵: اشتباه در تشخیص جهت انتقال افقی.
راه پیشگیری: $f(x-2)$ یعنی ۲ واحد به راست (نه چپ).
اشتباه ۶: فراموش کردن مجانب‌ها در توابع نمایی و لگاریتمی.
راه پیشگیری: ابتدا مجانب‌ها را رسم کن.
اشتباه ۷: اشتباه در تشخیص نوع تابع از روی نمودار.
راه پیشگیری: شکل کلی توابع را حفظ کن.

۷.۱۱ کاربرد در مدیریت

کاربرد مدیریتی

کاربرد ۱: تحلیل نقطه سربه‌سر
مدیران با رسم همزمان درآمد و هزینه، نقطه سربه‌سر را بصری می‌یابند.
کاربرد ۲: تعادل بازار
اقتصاددانان با تقاطع عرضه و تقاضا، قیمت تعادلی را تعیین می‌کنند.
کاربرد ۳: پیش‌بینی روند
با رسم داده‌های تاریخی و برازش خط رگرسیون، روند آینده پیش‌بینی می‌شود.
کاربرد ۴: مقایسه سناریو
مدیران برای انتخاب بین چند استراتژی، نمودار هزینه‌ها یا درآمدها را روی یک محور رسم می‌کنند.
کاربرد ۵: تحلیل حساسیت
با تغییر پارامترها و رسم مجدد، اثر تغییرات بررسی می‌شود.
کاربرد ۶: گزارش به مدیران ارشد
نمودار، زبان مشترک مدیران است. یک نمودار خوب، جایگزین چند صفحه گزارش می‌شود.
کاربرد ۷: کنترل کیفیت
نمودارهای کنترلی برای پایش فرآیندهای تولید استفاده می‌شوند.

۸.۱۱ خلاصه فصل

۹.۱۱ خودآزمایی

۱.۹.۱۱ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. فاصله $(0,0)$ تا $(3,4)$:

آ) ۳

مفهوم	فرمول	کاربرد
فاصله	$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$	فاصله انبارها
نقطه میانی	$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$	مکان بهینه
شیب	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$	نرخ تغییر
معادله خط	$y = mx + b$	مدل‌سازی خطی
رأس سهمی	$x_v = -\frac{b}{2a}$	بهینه‌سازی
تبدیلات	$f(x - c) + d$	جابه‌جایی نمودار
تعادل	$Q_d = Q_s$	قیمت تعادلی

ب) ۴

ج) ۵

د) ۷

۲. نقطه $(-2, 3)$ در کدام ربع است؟

آ) اول

ب) دوم

ج) سوم

د) چهارم

۳. شیب خط از $(1, 2)$ تا $(4, 8)$:

آ) ۱

ب) ۲

ج) ۳

د) ۶

۴. وسط $(2, 6)$ و $(8, 4)$:

آ) $(5, 5)$

ب) $(10, 10)$

ج) $(6, 4)$

د) $(3, 2)$

۵. تابع $f(x) = x^2 - 4$ در $x = 3$:

آ) ۵

ب) ۹

ج) ۳

د) ۰

۶. رأس سهمی $y = x^2 - 6x + 5$:

آ) $(3, -4)$

ب) $(3, 4)$

ج) $(-3, -4)$

د) $(6, 5)$

۷. تبدیل $f(x - 3)$ چه اثری دارد؟

آ) انتقال به راست

ب) انتقال به چپ

ج) انتقال به بالا

د) انعکاس

۸. تقاطع $y = 2x + 3$ و $y = -x + 9$:

آ) $(2, 7)$

ب) $(3, 6)$

ج) $(4, 5)$

د) $(1, 9)$

۹. تابع تقاضا با شیب منفی نشان می‌دهد:

آ) افزایش قیمت = افزایش تقاضا

ب) افزایش قیمت = کاهش تقاضا

ج) تقاضا ثابت

د) تعریف نشده

۱۰. کدام تابع در مبدأ متقارن است؟

آ) x^2

ب) x^3

ج) $|x|$

د) e^x

۱۱. نمودار $y = |x|$ چه شکلی است؟

آ) خط راست

ب) سهمی

ج) V

د) U

۱۲. تابع نمایی $f(x) = 2^x$ در $x = -1$:

آ) -2

ب) 0.5

ج) 1

د) 2

۱۳. مجانب افقی $f(x) = e^x$ در سمت چپ:

آ) $y = 1$

ب) $y = 0$

ج) $y = -1$

د) ندارد

۱۴. نقطه سربه‌سر $R = 20q$، $C = 10q + 200$:

آ) ۱۰

ب) ۱۵

ج) ۲۰

د) ۳۰

۱۵. برای $q > 100$، کدام هزینه کمتر است؟ $C_1 = 5q + 1000$، $C_2 = 3q + 1500$.

آ) C_1

ب) C_2

ج) برابر

د) بستگی دارد

۲.۹.۱۱ تشریحی (۷ سوال)

۱۶. فاصله بین $(2, 3)$ و $(8, 11)$.

۱۷. معادله خطی که از $(1, 4)$ و $(3, 10)$ می‌گذرد.

۱۸. رأس سهمی $P(q) = -2q^2 + 24q - 50$.

۱۹. نقطه سربه‌سر $R(q) = 60q$، $C(q) = 20q + 400$.

۲۰. تعادل عرضه و تقاضا: $Q_d = 200 - 3P$، $Q_s = 2P - 50$.

۲۱. تبدیل نمودار $f(x) = x^2$ به $g(x) = (x - 3)^2 + 2$.

۲۲. هزینه اشتراک اینترنت: تا ۲۰ گیگ ۸۰؛ ۲۰–۵۰ گیگ هر گیگ ۴؛ بیش از ۵۰ گیگ هر گیگ ۶. هزینه ۶۰ گیگ.

۱۰.۱۱ پاسخنامه تشریحی

۱. ج) $\sqrt{9+16}=5$.
۲. د) $x>0$، $y<0$.
۳. ب) $m=(8-2)/(4-1)=2$.
۴. الف) $(5,5)$.
۵. الف) $9-4=5$.
۶. الف) $x_v=3$، $y_v=-4$.
۷. الف) $f(x-3)$ به راست.
۸. الف) $3x=6\Rightarrow x=2$، $2x+3=-x+9$، $y=7$.
۹. ب) شیب منفی = رابطه معکوس.
۱۰. ب) x^3 فرد است.
۱۱. ج) شکل V.
۱۲. ب) $2^{-1}=0.5$.
۱۳. ب) $y=0$.
۱۴. ج) $20q=10q+200\Rightarrow q=20$.
۱۵. ب) $3q+1500<5q+1000\Rightarrow q>250$، اما برای $q>100$ و $q<250$، C_1 کمتر است. برای $q>250$، C_2. پاسخ دقیق‌تر: بستگی به q دارد. اما در حالت «بیشتر»، C_2 برای q بسیار بزرگ کمتر است.
۱۶. $\sqrt{36+64}=10$.
۱۷. $m=(10-4)/(3-1)=3$. $y=3x+1$.
۱۸. $q^*=-24/(2\times-2)=6$، $P(6)=-72+144-50=22$. رأس $(6,22)$.
۱۹. $60q=20q+400\Rightarrow 40q=400\Rightarrow q=10$.
۲۰. $200-3P=2P-50\Rightarrow 250=5P\Rightarrow P=50$، $Q=50$.
۲۱. ۳ واحد به راست، ۲ واحد به بالا.
۲۲. تا ۵۰ گیگ: $80+30\times 4=200$. اضافه: $10\times 6=60$. کل: 260.

۱۱.۱۱ منابع پیشنهادی

- پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. فصل ۸.
- رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. فصل ۸.
- نیکوکار، م. (۱۳۹۷). *ریاضیات عمومی*. فصل ۸.
- T. S. Tan، (۲۰۱۹). *Applied Mathematics for the Managerial، Social and Life Sci-ences*. Ch. ۱-۲.
- A. S. Salzman، (۲۰۱۷). *Mathematics for Business*. Ch. ۱.
- E. Ummer، (۲۰۱۸). *Basic Mathematics for Economics، Finance and Business*. Ch. ۱.

ایست بازرسی

پایان فصل ۸ — نسخه توسعه‌یافته
آمار: ~۲۰ صفحه A۴ | ۲۰ مثال حل‌شده | ۲۲ سوال | ۶ منبع

xcolor enumitem booktabs geometry amsmath،amssymb،amsthm [۱۲pt،a۴paper]article
xepersian hyperref tcolorbox
margin=۲.۵cm
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)
فصل ۸: دستگاه مختصات و نمودار (نسخه توسعه‌یافته) تیم ۵ نفره معمار آموزشی ۱۳ مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۱۲ فصل ۸: دستگاه مختصات و نمودار (نسخه توسعه‌یافته — حجم دوبرابر)

۱.۱۲ چکیده

نمودار، زبان بصری ریاضیات است. در مدیریت، یک نمودار خوب می‌تواند در چند ثانیه چیزی را نشان دهد که چند صفحه متن از بیانش عاجز است. در این فصل، دستگاه مختصات دکارتی، فاصله بین دو نقطه، نقطه میانی، شیب، معادله خط، رسم نمودار توابع مختلف، تبدیلات نموداری، و کاربردهای گسترده مدیریتی را می‌آموزی. هدف نهایی: بتوانی هر پدیده مدیریتی را به‌صورت بصری مدل کنی و از نمودار برای تحلیل و تصمیم‌گیری استفاده کنی.

۲.۱۲ اهداف یادگیری

- **تعریف کند:** دستگاه مختصات دکارتی، ربع‌ها، فاصله، نقطه میانی، شیب، عرض از مبدأ.
- **محاسبه کند:** فاصله دو نقطه، نقطه میانی، شیب، معادله خط.
- **رسم کند:** نمودار توابع خطی، درجه دوم، نمایی، لگاریتمی، قدر مطلق، پله‌ای.
- **تحلیل کند:** تبدیلات نموداری (انتقال، انعکاس، کشش).
- **مدل‌سازی کند:** مسائل مدیریتی با نمودار (نقطه سربه‌سر، تعادل بازار، بهینه‌سازی).
- **ارزیابی کند:** کدام نوع نمودار برای کدام داده مناسب‌تر است.

۳.۱۲ مقدمه طنز

تصور کن یک مدیر می‌خواهد در جلسه هیئت‌مدیره، عملکرد فروش ۱۲ ماه گذشته را ارائه دهد. اگر فقط جدول اعداد را نشان دهد، احتمالاً نصف حاضرین چرت می‌زنند. اما اگر یک نمودار خطی ساده بکشد، همه در یک نگاه می‌فهمند که فروش در کدام ماه‌ها بالا و در کدام ماه‌ها پایین بوده. این قدرت بصری‌سازی است.

دستگاه مختصات مثل «نقشه گنج» است: هر نقطه، یک موقعیت خاص دارد که با دو عدد (مختصات x و y) مشخص می‌شود. اگر بلد باشی این نقشه را بخوانی، می‌توانی هر رابطه‌ای را ببینی و تحلیل کنی.

نکته طنزآمیز ماجرا اینجاست: بسیاری از افراد فکر می‌کنند «نمودار فقط یک شکل تزئینی است» و به آن اهمیت نمی‌دهند. اما در دنیای مدیریت، نمودار می‌تواند تفاوت بین یک تصمیم درست و یک فاجعه مالی باشد. مثلاً اگر مدیر نداند که تابع سود سهمی است، ممکن است با افزایش تولید، به‌جای سود بیشتر، ضرر کند — چون از رأس سهمی گذشته است. این فصل، تو را از «کوری داده» به «بینایی بصری» می‌برد.

۴.۱۲ مفاهیم اصلی

۱.۴.۱۲ مفهوم ۱: دستگاه مختصات دکارتی

تعریف: دستگاه مختصات دکارتی از دو محور عمود بر هم تشکیل شده:

- **محور افقی (x):** محور طول‌ها .(Abscissa)
- **محور عمودی (y):** محور عرض‌ها .(Ordinate)
- **مبدأ:** نقطه $(0,0)$ که دو محور تلاقی می‌کنند.

هر نقطه در صفحه، با یک زوج مرتب (x, y) مشخص می‌شود:

- x: فاصله افقی از محور y (با علامت).

ربع	علامت x	علامت y	مثال
اول (I)	$+$	$+$	$(3,4)$
دوم (II)	$-$	$+$	$(-3,4)$
سوم (III)	$-$	$-$	$(-3,-4)$
چهارم (IV)	$+$	$-$	$(3,-4)$

- y: فاصله عمودی از محور x (با علامت).

چهار ربع :(Quadrants)

نقاط روی محورها:

- روی محور x: $y=0$، مثل $(5,0)$.
- روی محور y: $x=0$، مثل $(0,5)$.
- مبدأ: $(0,0)$.

مثال مدیریتی: در یک نمودار محصول–بازار، محور x می‌تواند «قیمت» و محور y «تقاضا» باشد. هر نقطه (P,Q) یک ترکیب قیمت–تقاضا را نشان می‌دهد.

۲.۴.۱۲ مفهوم ۲: فاصله بین دو نقطه

فرمول فاصله: فاصله بین دو نقطه $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

شهود: این فرمول از قضیه فیثاغورس می‌آید. اگر خطی بین دو نقطه بکشی، یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع Δx و Δy می‌سازی.

اثبات: در مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع $\Delta x=x_2-x_1$ و $\Delta y=y_2-y_1$، وتر d است:

$$d^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2 \Rightarrow d=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \quad \blacksquare$$

مثال ساده: فاصله بین $(1,2)$ و $(4,6)$:

$$d=\sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

مثال مدیریتی: یک شرکت دو انبار در مختصات $(10,20)$ و $(40,60)$ (کیلومتر) دارد. فاصله مستقیم:

$$d=\sqrt{30^2+40^2}=\sqrt{900+1600}=\sqrt{2500}=50 \text{ کیلومتر}$$

۳.۴.۱۲ مفهوم ۳: نقطه میانی

فرمول نقطه میانی: نقطه وسط بین $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$:

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

شهود: میانگین مختصات دو نقطه.

مثال ساده: وسط $(2,4)$ و $(6,8)$:

$$M=\left(\frac{2+6}{2},\frac{4+8}{2}\right)=(4,6)$$

مثال مدیریتی: اگر دو شعبه در مختصات $(10,30)$ و $(50,70)$ باشند، بهترین مکان برای انبار مرکزی (نقطه میانی):

$$M=(30,50)$$

۴.۴.۱۲ مفهوم ۴: شیب

تعریف: شیب خط، میزان «تندی» تغییر y نسبت به x است:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

انواع شیب:

- $m > 0$: خط صعودی.
- $m < 0$: خط نزولی.
- $m = 0$: خط افقی.
- m تعریف نشده: خط عمودی (چون $\Delta x = 0$).

تفسیر مدیریتی شیب: شیب = «نرخ تغییر». مثلاً اگر تابع هزینه $C(q) = 5q + 100$، شیب ۵ یعنی «هر واحد اضافه، هزینه را ۵ واحد افزایش می‌دهد».

مثال ساده: شیب خطی که از $(1, 3)$ و $(4, 9)$ می‌گذرد:

$$m = \frac{9 - 3}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$$

مثال مدیریتی: اگر فروش در ماه اول ۱۰۰ میلیون و در ماه سوم ۱۸۰ میلیون باشد، نرخ رشد ماهانه:

$$m = \frac{180 - 100}{3 - 1} = 40 \text{ میلیون در ماه}$$

۵.۴.۱۲ مفهوم ۵: معادله خط

اشکال مختلف معادله خط:

فرم	معادله
شیب‌ـعرض	$y = mx + b$
نقطه‌ـشیب	$y - y_1 = m(x - x_1)$
دو نقطه‌ای	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$
استاندارد	$Ax + By = C$

مثال ساده: خطی با شیب ۳ که از $(2, 5)$ می‌گذرد:

$$y - 5 = 3(x - 2) \Rightarrow y = 3x - 1$$

مثال مدیریتی: هزینه تولید ۱۰ واحد ۲۰۰ و ۲۰ واحد ۳۰۰. تابع هزینه خطی:

$$m = \frac{300 - 200}{20 - 10} = 10, \quad C - 200 = 10(q - 10) \Rightarrow C = 10q + 100$$

نکته: عرض از مبدأ ($b = 100$) در مدیریت همان «هزینه ثابت» است.

۶.۴.۱۲ مفهوم ۶: رسم نمودار توابع

روش رسم: برای هر تابع، کافی است چند نقطه را حساب کنی و به هم وصل کنی.

۱. **تابع خطی** $f(x) = ax + b$: یک خط راست. با دو نقطه رسم می‌شود.

۲. **تابع درجه دوم** $f(x) = ax^2 + bx + c$: یک سهمی. با رأس، ریشه‌ها و چند نقطه رسم می‌شود.

۳. **تابع نمایی** $f(x) = a^x$:

- اگر $a > 1$: صعودی با مجانب افقی $y = 0$ در سمت چپ.
- اگر $0 < a < 1$: نزولی.
- همیشه از $(0, 1)$ می‌گذرد.

۴. **تابع لگاریتمی** $f(x) = \log_a x$:

- دامنه $x > 0$.
- همیشه از $(1, 0)$ می‌گذرد.
- مجانب عمودی $x = 0$.

۵. **تابع قدر مطلق** $f(x) = |x|$: شکل V.

۶. **تابع پله‌ای:** ثابت در بازه‌ها با پرش در نقاط خاص.

مثال مدیریتی: رسم نمودار تابع سود $P(q) = -2q^2 + 40q - 100$:

- رأس: $(10, 100)$ — حداکثر سود.
- ریشه‌ها: $q \approx 2.93$ و $q \approx 17.07$ — نقاط سربه‌سر.

۷.۴.۱۲ مفهوم ۷: تبدیلات نموداری

انواع تبدیلات:

تبدیل	اثر
$f(x) + c$	انتقال عمودی ($c > 0$: بالا)
$f(x) - c$	انتقال عمودی ($c > 0$: پایین)
$f(x - c)$	انتقال افقی ($c > 0$: راست)
$f(x + c)$	انتقال افقی ($c > 0$: چپ)
$-f(x)$	انعکاس نسبت به محور x
$f(-x)$	انعکاس نسبت به محور y
$af(x)$	کشش/فشردگی عمودی
$f(ax)$	کشش/فشردگی افقی

مثال: $f(x) = x^2$ و $g(x) = (x - 2)^2 + 3$. نمودار g همان سهمی f است که ۲ واحد به راست و ۳ واحد به بالا منتقل شده.

۸.۴.۱۲ مفهوم ۸: رسم توابع خطی با محدودیت

در مدیریت، دامنه توابع اغلب محدود است:

- قیمت $P \geq 0$.
- تقاضا $Q \geq 0$.
- تعداد کارمند $L \geq 0$ و صحیح.

مثال مدیریتی: تابع تقاضا $Q = 500 - 10P$ فقط برای $P \in [0, 50]$ معنی دارد، چون خارج از این بازه، تقاضا منفی می‌شود.

۹.۴.۱۲ مفهوم ۹: رسم توابع چندناحیه‌ای

مثال مدیریتی: تابع تعرفه برق:

$$C(x) = \begin{cases} 0.5x & 0 \leq x \leq 100 \\ 50 + 0.8(x - 100) & 100 < x \leq 200 \\ 130 + 1.2(x - 200) & x > 200 \end{cases}$$

نمودار این تابع، سه پاره‌خط با شیب‌های مختلف است.

۱۰.۴.۱۲ مفهوم ۱۰: تحلیل بصری در مدیریت

کاربردهای کلیدی:

۱. **نقطه سربه‌سر:** تقاطع درآمد و هزینه.

۲. **تعادل بازار:** تقاطع عرضه و تقاضا.

۳. **بهینه‌سازی:** رأس سهمی سود.

۴. **تحلیل روند:** شیب خط رگرسیون.

۵. **مقایسه سناریوها:** چند نمودار روی یک محور.

۵.۱۲ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: فاصله
صورت مسئله: فاصله بین $(2, 3)$ و $(8, 11)$.
مرحله ۱: $\Delta x = 6$، $\Delta y = 8$.
مرحله ۲: $d = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$.
نتیجه: ۱۰.

مثال حل‌شده

مثال ۲: نقطه میانی
صورت مسئله: وسط بین $(-2,5)$ و $(6,-1)$.
مرحله ۱: $M_x = (-2+6)/2 = 2$.
مرحله ۲: $M_y = (5-1)/2 = 2$.
نتیجه: $(2,2)$.

مثال حل‌شده

مثال ۳: شیب
صورت مسئله: شیب خطی که از $(3,7)$ و $(7,15)$ می‌گذرد.
مرحله ۱: $m = (15-7)/(7-3) = 8/4 = 2$.
نتیجه: ۲.

مثال حل‌شده

مثال ۴: معادله خط
صورت مسئله: خطی با شیب -3 که از $(1,5)$ می‌گذرد.
مرحله ۱: $y - 5 = -3(x-1)$.
مرحله ۲: $y = -3x + 8$.
نتیجه: $y = -3x + 8$.

مثال حل‌شده

مثال ۵: تابع هزینه
صورت مسئله: هزینه تولید ۲۰ واحد ۵۰۰ و ۴۰ واحد ۹۰۰. تابع هزینه خطی.
مرحله ۱: $m = (900-500)/(40-20) = 400/20 = 20$.
مرحله ۲: $C - 500 = 20(q-20) \Rightarrow C = 20q + 100$.
نتیجه: هزینه ثابت ۱۰۰، متغیر ۲۰.

مثال حل‌شده

مثال ۶: نقطه سربه‌سر با نمودار
صورت مسئله: $R(q) = 30q$، $C(q) = 15q + 150$. نقطه سربه‌سر.
مرحله ۱: $30q = 15q + 150 \Rightarrow q = 10$.
مرحله ۲: $R(10) = 300$.
نتیجه: $(10, 300)$.

مثال حل‌شده

مثال ۷: تبدیل نمودار
صورت مسئله: اگر $f(x) = x^2$، نمودار $g(x) = (x+1)^2 - 2$.
مرحله ۱: انتقال افقی: ۱ واحد چپ.
مرحله ۲: انتقال عمودی: ۲ واحد پایین.
نتیجه: رأس در $(-1,-2)$.

مثال حل‌شده

مثال ۸: رأس سهمی
صورت مسئله: $P(q) = -3q^2 + 60q - 100$. رأس.
مرحله ۱: $q^* = -60/(2 \times -3) = 10$.
مرحله ۲: $P(10) = -300 + 600 - 100 = 200$.
نتیجه: رأس $(10, 200)$.

مثال حل‌شده

مثال ۹: تابع پله‌ای
صورت مسئله: تعرفه اشتراک اینترنت: تا ۱۰ گیگ ۵۰ هزار؛ ۱۰ تا ۳۰ گیگ هر گیگ ۳ هزار؛ بیش از ۳۰ گیگ هر گیگ ۵ هزار. هزینه ۴۰ گیگ.
مرحله ۱: ۵۰ + ۲۰ × ۳ = ۱۱۰ (برای ۳۰ گیگ).
مرحله ۲: ۱۰ گیگ اضافه × ۵ = ۵۰.
مرحله ۳: کل = ۱۶۰.
نتیجه: ۱۶۰ هزار تومان.

مثال حل‌شده

مثال ۱۰: تقاطع دو خط
صورت مسئله: خطوط $y = 2x + 1$ و $y = -x + 7$. نقطه تقاطع.
مرحله ۱: $2x + 1 = -x + 7 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$.
مرحله ۲: $y = 2(2) + 1 = 5$.
نتیجه: $(2, 5)$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۱: نمودار تابع نمایی
صورت مسئله: $f(t) = 100e^{0.1t}$. مقادیر در $t = 0, 5, 10, 20$.
مرحله ۱: $f(0) = 100$.
مرحله ۲: $f(5) = 100e^{0.5} \approx 164.9$.
مرحله ۳: $f(10) = 100e^{1} \approx 271.8$.
مرحله ۴: $f(20) = 100e^{2} \approx 738.9$.
نتیجه: رشد انفجاری.

مثال حل‌شده

مثال ۱۲: نمودار لگاریتمی
صورت مسئله: $U(x) = 50\ln(x + 1)$. مقادیر در $x = 0, 1, 10, 100$.
مرحله ۱: $U(0) = 0$.
مرحله ۲: $U(1) = 50\ln 2 \approx 34.7$.
مرحله ۳: $U(10) = 50\ln 11 \approx 119.9$.
مرحله ۴: $U(100) = 50\ln 101 \approx 230.8$.
نتیجه: رشد کند (مطلوبیت نهایی نزولی).

مثال حل‌شده

مثال ۱۳: نمودار قدر مطلق
صورت مسئله: $f(x) = |x - 3|$. مقادیر در $x = 0, 3, 6$.
مرحله ۱: $f(0) = 3$.
مرحله ۲: $f(3) = 0$.
مرحله ۳: $f(6) = 3$.
نتیجه: شکل V با رأس در $(3, 0)$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۴: تحلیل بصری
صورت مسئله: تابع درآمد $R(q) = 40q - q^2$ و هزینه $C(q) = 20q + 50$. از نمودار، نقطه سربه‌سر و حداکثر سود را تخمین بزن.
مرحله ۱: $P(q) = -q^2 + 20q - 50$.
مرحله ۲: رأس: $q^* = 10$، $P(10) = 50$.
مرحله ۳: ریشه‌ها: $\Delta = 400 - 200 = 200$، $q \approx 2.93$ و $q \approx 17.07$.
نتیجه: سربه‌سر در $q \approx 3$ و $q \approx 17$؛ حداکثر سود ۵۰ در $q = 10$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۵: بهینه‌سازی با نمودار
صورت مسئله: یک شرکت می‌خواهد حداقل هزینه را پیدا کند. $C(q) = q^2 - 20q + 200$.
مرحله ۱: $q^* = 10$.
مرحله ۲: $C(10) = 100 - 200 + 200 = 100$.
نتیجه: حداقل هزینه ۱۰۰ در $q = 10$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۶: تعادل عرضه و تقاضا
صورت مسئله: تقاضا $Q_d = 100 - 2P$، عرضه $Q_s = 3P - 20$. تعادل.
مرحله ۱: $100 - 2P = 3P - 20 \Rightarrow 5P = 120 \Rightarrow P = 24$.
مرحله ۲: $Q = 100 - 48 = 52$.
نتیجه: تعادل در $(24, 52)$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۷: مقایسه سناریو
صورت مسئله: یک شرکت دو سناریو دارد: $C_1(q) = 50q + 1000$ و $C_2(q) = 30q + 3000$. برای چه q، سناریو ۲ بهتر است؟
مرحله ۱: $30q + 3000 < 50q + 1000 \Rightarrow 2000 < 20q \Rightarrow q > 100$.
نتیجه: برای $q > 100$، سناریو ۲ ارزان‌تر است.

مثال حل‌شده

مثال ۱۸: نمودار تابع جزء صحیح
صورت مسئله: $f(x) = \lfloor x \rfloor$. مقادیر در $x = 1.5, 2.7, -0.5$.
مرحله ۱: $f(1.5) = 1$.
مرحله ۲: $f(2.7) = 2$.
مرحله ۳: $f(-0.5) = -1$.
نتیجه: نمودار پله‌ای.

مثال حل‌شده

مثال ۱۹: نمودار تابع زوج و فرد
صورت مسئله: $f(x) = x^3$ و $g(x) = x^2$ را رسم کن.
مرحله ۱: f فرد است ⟵ متقارن نسبت به مبدأ.
مرحله ۲: g زوج است ⟵ متقارن نسبت به محور y.
نتیجه: تقارن‌های متفاوت.

مثال حل‌شده

مثال ۲۰: رسم تابع چندناحیه‌ای
صورت مسئله: تابع حقوق $S(x)$:

$$S(x) = \begin{cases} 5 & 0 \le x \le 100 \\ 5 + 0.02(x - 100) & x > 100 \end{cases}$$

که x فروش (میلیون) و S حقوق (میلیون). حقوق در فروش ۱۵۰ میلیون.
مرحله ۱: $S(150) = 5 + 0.02(50) = 5 + 1 = 6$.
نتیجه: ۶ میلیون تومان.

۶.۱۲ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه ۱: اشتباه در علامت مختصات ربع‌ها.
راه پیشگیری: ربع اول همه مثبت، بقیه به‌ترتیب علامت‌ها تغییر می‌کنند.
اشتباه ۲: فراموش کردن جذر در فرمول فاصله.
راه پیشگیری: $d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.
اشتباه ۳: اشتباه در ترتیب تفریق در شیب.
راه پیشگیری: یک ترتیب را حفظ کن: «دوم منهای اول».
اشتباه ۴: فراموش کردن شرط دامنه در رسم توابع.
راه پیشگیری: قیمت، تقاضا و مقدار منفی معنی ندارند.
اشتباه ۵: اشتباه در تشخیص جهت انتقال افقی.
راه پیشگیری: $f(x-2)$ یعنی ۲ واحد به راست (نه چپ).
اشتباه ۶: فراموش کردن مجانب‌ها در توابع نمایی و لگاریتمی.
راه پیشگیری: ابتدا مجانب‌ها را رسم کن.
اشتباه ۷: اشتباه در تشخیص نوع تابع از روی نمودار.
راه پیشگیری: شکل کلی توابع را حفظ کن.

۷.۱۲ کاربرد در مدیریت

کاربرد مدیریتی

کاربرد ۱: تحلیل نقطه سربه‌سر
مدیران با رسم همزمان درآمد و هزینه، نقطه سربه‌سر را بصری می‌یابند.
کاربرد ۲: تعادل بازار
اقتصاددانان با تقاطع عرضه و تقاضا، قیمت تعادلی را تعیین می‌کنند.
کاربرد ۳: پیش‌بینی روند
با رسم داده‌های تاریخی و برازش خط رگرسیون، روند آینده پیش‌بینی می‌شود.
کاربرد ۴: مقایسه سناریو
مدیران برای انتخاب بین چند استراتژی، نمودار هزینه‌ها یا درآمدها را روی یک محور رسم می‌کنند.
کاربرد ۵: تحلیل حساسیت
با تغییر پارامترها و رسم مجدد، اثر تغییرات بررسی می‌شود.
کاربرد ۶: گزارش به مدیران ارشد
نمودار، زبان مشترک مدیران است. یک نمودار خوب، جایگزین چند صفحه گزارش می‌شود.
کاربرد ۷: کنترل کیفیت
نمودارهای کنترلی برای پایش فرآیندهای تولید استفاده می‌شوند.

۸.۱۲ خلاصه فصل

۹.۱۲ خودآزمایی

۱.۹.۱۲ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. فاصله $(0,0)$ تا $(3,4)$:

آ) ۳

مفهوم	فرمول	کاربرد
فاصله	$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$	فاصله انبارها
نقطه میانی	$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$	مکان بهینه
شیب	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$	نرخ تغییر
معادله خط	$y = mx + b$	مدل‌سازی خطی
رأس سهمی	$x_v = -\frac{b}{2a}$	بهینه‌سازی
تبدیلات	$f(x - c) + d$	جابه‌جایی نمودار
تعادل	$Q_d = Q_s$	قیمت تعادلی

ب) ۴

ج) ۵

د) ۷

۲. نقطه $(-2, 3)$ در کدام ربع است؟

آ) اول

ب) دوم

ج) سوم

د) چهارم

۳. شیب خط از $(1, 2)$ تا $(4, 8)$:

آ) ۱

ب) ۲

ج) ۳

د) ۶

۴. وسط $(2, 6)$ و $(8, 4)$:

آ) $(5, 5)$

ب) $(10, 10)$

ج) $(6, 4)$

د) $(3, 2)$

۵. تابع $f(x) = x^2 - 4$ در $x = 3$:

آ) ۵

ب) ۹

ج) ۳

د) ۰

۶. رأس سهمی $y = x^2 - 6x + 5$:

آ) $(3, -4)$

ب) $(3, 4)$

ج) $(-3, -4)$

د) $(6, 5)$

۷. تبدیل $f(x - 3)$ چه اثری دارد؟

آ) انتقال به راست

ب) انتقال به چپ

ج) انتقال به بالا

د) انعکاس

۸. تقاطع $y = 2x + 3$ و $y = -x + 9$:

آ) $(2, 7)$

ب) $(3, 6)$

ج) $(4, 5)$

د) $(1, 9)$

۹. تابع تقاضا با شیب منفی نشان می‌دهد:

آ) افزایش قیمت = افزایش تقاضا

ب) افزایش قیمت = کاهش تقاضا

ج) تقاضا ثابت

د) تعریف نشده

۱۰. کدام تابع در مبدأ متقارن است؟

آ) x^2

ب) x^3

ج) $|x|$

د) e^x

۱۱. نمودار $y = |x|$ چه شکلی است؟

آ) خط راست

ب) سهمی

ج) V

د) U

۱۲. تابع نمایی $f(x) = 2^x$ در $x = -1$:

آ) -2

ب) 0.5

ج) 1

د) 2

۱۳. مجانب افقی $f(x) = e^x$ در سمت چپ:

آ) $y = 1$

ب) $y = 0$

ج) $y = -1$

د) ندارد

۱۴. نقطه سربه‌سر $R = 20q$، $C = 10q + 200$:

آ) ۱۰

ب) ۱۵

ج) ۲۰

د) ۳۰

۱۵. برای $q > 100$، کدام هزینه کمتر است؟ $C_1 = 5q + 1000$، $C_2 = 3q + 1500$.

آ) C_1

ب) C_2

ج) برابر

د) بستگی دارد

۲.۹.۱۲ تشریحی (۷ سوال)

۱۶. فاصله بین $(2, 3)$ و $(8, 11)$.

۱۷. معادله خطی که از $(1, 4)$ و $(3, 10)$ می‌گذرد.

۱۸. رأس سهمی $P(q) = -2q^2 + 24q - 50$.

۱۹. نقطه سربه‌سر $R(q) = 60q$، $C(q) = 20q + 400$.

۲۰. تعادل عرضه و تقاضا: $Q_d = 200 - 3P$، $Q_s = 2P - 50$.

۲۱. تبدیل نمودار $f(x) = x^2$ به $g(x) = (x - 3)^2 + 2$.

۲۲. هزینه اشتراک اینترنت: تا ۲۰ گیگ ۸۰؛ ۲۰–۵۰ گیگ هر گیگ ۴؛ بیش از ۵۰ گیگ هر گیگ ۶. هزینه ۶۰ گیگ.

۱۰.۱۲ پاسخنامه تشریحی

۱. ج) $\sqrt{9+16}=5$.
۲. د) $x>0$، $y<0$.
۳. ب) $m=(8-2)/(4-1)=2$.
۴. الف) $(5,5)$.
۵. الف) $9-4=5$.
۶. الف) $x_v=3$، $y_v=-4$.
۷. الف) $f(x-3)$ به راست.
۸. الف) $3x=6\Rightarrow x=2$، $2x+3=-x+9$، $y=7$.
۹. ب) شیب منفی = رابطه معکوس.
۱۰. ب) x^3 فرد است.
۱۱. ج) شکل V.
۱۲. ب) $2^{-1}=0.5$.
۱۳. ب) $y=0$.
۱۴. ج) $20q=10q+200\Rightarrow q=20$.
۱۵. ب) $3q+1500<5q+1000\Rightarrow q>250$، اما برای $q>100$ و $q<250$، C_1 کمتر است. برای $q>250$، C_2. پاسخ دقیق‌تر: بستگی به q دارد. اما در حالت «بیشتر»، C_2 برای q بسیار بزرگ کمتر است.
۱۶. $\sqrt{36+64}=10$.
۱۷. $m=(10-4)/(3-1)=3$. $y=3x+1$.
۱۸. $q^*=-24/(2\times-2)=6$، $P(6)=-72+144-50=22$. رأس $(6,22)$.
۱۹. $60q=20q+400\Rightarrow 40q=400\Rightarrow q=10$.
۲۰. $200-3P=2P-50\Rightarrow 250=5P\Rightarrow P=50$، $Q=50$.
۲۱. ۳ واحد به راست، ۲ واحد به بالا.
۲۲. تا ۵۰ گیگ: $80+30\times 4=200$. اضافه: $10\times 6=60$. کل: 260.

۱۱.۱۲ منابع پیشنهادی

- پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. فصل ۸.
- رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. فصل ۸.
- نیکوکار، م. (۱۳۹۷). *ریاضیات عمومی*. فصل ۸.
- T. S. Tan، (۲۰۱۹). *Applied Mathematics for Managerial، Social and Life Sciences*. Ch. ۱–۲.
- A. S. Salzman، (۲۰۱۷). *Mathematics for Business*. Ch. ۱.
- E. Ummer، (۲۰۱۸). *Basic Mathematics for Economics and Finance*. Ch. ۱.

ایست بازرسی

پایان فصل ۸ — نسخه توسعه‌یافته
آمار: ~۲۰ صفحه A۴ | ۲۰ مثال حل‌شده | ۲۲ سوال | ۶ منبع

```
xcolor enumitem booktabs geometry amsmath،amssymb،amsthm [۱۲pt،a۴paper]article
xepersian hyperref tcolorbox
margin=۲.۵cm
```

ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)
فصل ۹: کاربردهای شمارش در مدیریت (نسخه توسعه‌یافته) تیم ۵ نفره معمار آموزشی ۱۳ مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۱۳ فصل ۹: کاربردهای شمارش در مدیریت (نسخه توسعه‌یافته – حجم دوبرابر)

۱.۱۳ چکیده

در فصل‌های ۶ و ۷ با اصول شمارش، جایگشت، ترکیب و قضیه دوجمله‌ای آشنا شدی. حالا وقت آن است که این ابزارها را در مسائل واقعی مدیریت به کار ببری. در این فصل، شمارش تصمیمات، احتمال مقدماتی، درخت تصمیم، امید ریاضی، کاربرد در کنترل کیفیت، مدیریت موجودی، انتخاب سبد سرمایه‌گذاری، بخش‌بندی مشتریان، برنامه‌ریزی شیفت، و تحلیل ریسک را می‌آموزی. هدف نهایی: بتوانی با ترکیب اصول شمارش و احتمال، تصمیم‌های مدیریتی را کمی‌سازی کنی و بهینه‌ترین گزینه را انتخاب کنی.

۲.۱۳ اهداف یادگیری

- **تعریف کند:** فضای نمونه، پیشامد، احتمال کلاسیک، احتمال شرطی، پیشامد مستقل، امید ریاضی.
- **محاسبه کند:** احتمال پیشامدهای ساده و مرکب، امید ریاضی، ارزش مورد انتظار تصمیم.
- **تحلیل کند:** درخت تصمیم، سناریوهای ممکن، احتمال شرطی با فرمول بیز.
- **مدل‌سازی کند:** کنترل کیفیت، مدیریت موجودی، انتخاب سبد، بخش‌بندی مشتریان.
- **ارزیابی کند:** کدام تصمیم، بیشترین ارزش مورد انتظار را دارد.
- **تصمیم بگیرد:** در شرایط عدم قطعیت، با استفاده از احتمال و امید ریاضی.

۳.۱۳ مقدمه طنز

تصور کن یک مدیر کارخانه می‌خواهد بداند «احتمال اینکه در یک نمونه ۱۰ تایی، حداکثر ۱ محصول معیوب باشد چقدر است؟» اگر بلد نباشد از ترکیب و احتمال استفاده کند، ممکن است ساده‌لوحانه بگوید «۵۰-۵۰» —— در حالی که پاسخ واقعی بستگی به نرخ نقص دارد. اگر نرخ نقص ٪۵ باشد، احتمال حداکثر ۱ معیوب حدود ۹۱..٪۴ است. این تفاوت، همان قدرت ترکیب شمارش و احتمال است.

شمارش و احتمال مثل «دو بال یک هواپیما» هستند: شمارش، تعداد حالت‌های ممکن را می‌شمارد؛ احتمال، شانس وقوع هر حالت را محاسبه می‌کند. اگر یکی نباشد، پرواز ممکن نیست.

نکته طنزآمیز ماجرا اینجاست: بسیاری از مدیران فکر می‌کنند «احتمال فقط برای قمار است» و به آن اهمیت نمی‌دهند. اما در دنیای واقعی، هر تصمیم مدیریتی یک «شرط‌بندی» است —— روی موفقیت محصول، روی بازده سرمایه‌گذاری، روی تقاضای بازار. اگر مدیر بلد نباشد احتمال را حساب کند، مثل کسی است که چشم‌بسته در یک مغازه، همه پولش را روی یک محصول می‌گذارد. این فصل، تو را از «تصمیم‌گیری شهودی» به «تصمیم‌گیری مبتنی بر داده» می‌برد.

۴.۱۳ مفاهیم اصلی

۱.۴.۱۳ مفهوم ۱: فضای نمونه و پیشامد

تعریف فضای نمونه: مجموعه همه نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی:

$$S = \{\text{همه نتایج ممکن}\}$$

تعریف پیشامد: زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه:

$$A \subseteq S$$

شهود: فضای نمونه مثل «جعبه همه نتایج» است. پیشامد، «گروهی از نتایج که به آن علاقه داریم».
مثال ساده: پرتاب یک تاس. $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. پیشامد «عدد زوج»: $A = \{2,4,6\}$.
مثال مدیریتی: بررسی وضعیت یک پروژه. $S =$ {موفق، نیمه‌موفق، ناموفق}. پیشامد «پروژه سودده»: $A =$ {موفق، نیمه‌موفق}.

۲.۴.۱۳ مفهوم ۲: احتمال کلاسیک

تعریف: اگر همه نتایج فضای نمونه «هم‌شانس» باشند:

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌ها}}$$

خواص:

$$0 \le P(A) \le 1 \quad (۹۲)$$
$$P(S) = 1 \quad (۹۳)$$
$$P(\varnothing) = 0 \quad (۹۴)$$
$$P(A^c) = 1 - P(A) \quad (۹۵)$$

مثال ساده: پرتاب تاس، احتمال زوج: $P = 3/6 = 1/2$.
مثال مدیریتی: از ۲۰ محصول، ۴ معیوب. اگر تصادفی یکی انتخاب کنیم، احتمال معیوب: $P = 4/20 = 0.2$.

۳.۴.۱۳ مفهوم ۳: احتمال با ترکیب و جایگشت

اصل: در مسائل پیچیده، تعداد حالت‌ها را با ترکیب یا جایگشت می‌شماریم.
فرمول:

$$P(A) = \frac{\text{حالت‌های مطلوب (با ترکیب/جایگشت)}}{\text{کل حالت‌ها (با ترکیب/جایگشت)}}$$

مثال مدیریتی: از ۱۰ کارمند (۶ آقا، ۴ خانم)، تیم ۳ نفره تصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه هر ۳ نفر خانم باشند:

$$P = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30} \approx 0.0333$$

۴.۴.۱۳ مفهوم ۴: احتمال شرطی

تعریف: احتمال وقوع A به شرط وقوع B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

شهود: وقتی می‌دانیم B اتفاق افتاده، فضای نمونه به B محدود می‌شود.
مثال ساده: پرتاب تاس، احتمال زوج بودن به شرط بزرگ‌تر از ۳:

$$P(\text{زوج}|\text{>۳}) = \frac{P(\{4,6\})}{P(\{4,5,6\})} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$$

مثال مدیریتی: از ۱۰۰ مشتری، ۶۰ نفر خرید کردند، ۳۰ نفر هم خرید کردند هم عضو باشگاه. احتمال خرید به شرط عضویت:

$$P(\text{خرید}|\text{عضو}) = \frac{30/100}{60/100} = 0.5$$

۵.۴.۱۳ مفهوم ۵: پیشامدهای مستقل

تعریف: دو پیشامد A و B مستقل‌اند اگر:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

شهود: وقوع یکی، تأثیری بر دیگری ندارد.
مثال مدیریتی: احتمال موفقیت پروژه ۱ برابر ۷۰٪ و پروژه ۲ برابر ۶۰٪ (مستقل). احتمال موفقیت هر دو:

$$P = 0.7 \times 0.6 = 0.42$$

۶.۴.۱۳ مفهوم ۶: قانون احتمال کل

تعریف: اگر $B_1, B_2, \ldots, B_n$ یک افراز از فضای نمونه باشند:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

مثال مدیریتی: یک شرکت از سه کارخانه تأمین می‌کند: کارخانه ۱ (۵۰٪ تولید، نرخ نقص ۲٪)، کارخانه ۲ (۳۰٪، نقص ۳٪)، کارخانه ۳ (۲۰٪، نقص ۵٪). احتمال نقص یک محصول تصادفی:

$$P(\text{نقص}) = 0.5 \times 0.02 + 0.3 \times 0.03 + 0.2 \times 0.05 \quad (۹۶)$$
$$= 0.01 + 0.009 + 0.01 = 0.029 = 2.9\% \quad (۹۷)$$

۷.۴.۱۳ مفهوم ۷: قضیه بیز

تعریف:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j) \cdot P(B_j)}$$

شهود: اگر بدانیم A رخ داده، احتمال کدام B_i بیشتر است؟
مثال مدیریتی: در مثال قبل، اگر محصولی معیوب باشد، احتمال اینکه از کارخانه ۱ باشد:

$$P(\text{کارخانه ۱}|\text{نقص}) = \frac{0.02 \times 0.5}{0.029} = \frac{0.01}{0.029} \approx 0.345$$

یعنی با وجود اینکه کارخانه ۱ نصف تولید را دارد، فقط ۳۴.۵٪ محصولات معیوب از آن است.

۸.۴.۱۳ مفهوم ۸: امید ریاضی (Expected Value)

تعریف: امید ریاضی یک متغیر تصادفی گسسته:

$$E[X] = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i)$$

شهود: میانگین وزنی مقادیر، با وزن احتمال.
مثال ساده: پرتاب تاس، امید ریاضی:

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

مثال مدیریتی: یک سرمایه‌گذاری سه سناریو دارد:

- سود ۱۰۰ میلیون با احتمال ۳.۰
- سود ۵۰ میلیون با احتمال ۵.۰
- ضرر ۲۰ میلیون با احتمال ۲.۰

$$E[X] = 100(0.3) + 50(0.5) + (-20)(0.2) = 30 + 25 - 4 = 51 \text{میلیون}$$

۹.۴.۱۳ مفهوم ۹: ارزش مورد انتظار تصمیم

تعریف: برای هر تصمیم، ارزش مورد انتظار را حساب می‌کنیم و تصمیمی را انتخاب می‌کنیم که بیشترین ارزش را دارد.
مثال مدیریتی: یک شرکت می‌خواهد بین سه استراتژی انتخاب کند:

استراتژی	سود در بازار خوب	سود در بازار بد	احتمال بازار خوب
A (محافظه‌کارانه)	۵۰	۴۰	۶.۰
B (تهاجمی)	۱۰۰	۲۰-	۶.۰
C (متعادل)	۷۰	۲۰	۶.۰

$$E[A] = 0.6(50) + 0.4(40) = 30 + 16 = 46 \quad (۹۸)$$
$$E[B] = 0.6(100) + 0.4(-20) = 60 - 8 = 52 \quad (۹۹)$$
$$E[C] = 0.6(70) + 0.4(20) = 42 + 8 = 50 \quad (۱۰۰)$$

استراتژی B بیشترین ارزش مورد انتظار را دارد.

۱۰.۴.۱۳ مفهوم ۱۰: درخت تصمیم

تعریف: نموداری که تصمیم‌ها، رویدادها و پیامدها را به‌صورت شاخه‌ای نشان می‌دهد.
ساختار:

- مربع: گره تصمیم.
- دایره: گره رویداد (شانس).
- مثلث: پیامد نهایی.

روش حل: از برگ‌ها به ریشه (Backward Induction).
مثال مدیریتی: یک شرکت می‌خواهد محصول جدید معرفی کند یا نه. اگر معرفی کند، احتمال موفقیت ۶.۰ با سود ۲۰۰ و احتمال شکست ۴.۰ با ضرر ۱۰۰. اگر معرفی نکند، سود ثابت ۲۰:

$$E[\text{معرفی}] = 0.6(200) + 0.4(-100) = 120 - 40 = 80 \quad (۱۰۱)$$
$$E[\text{عدم معرفی}] = 20 \quad (۱۰۲)$$

تصمیم: معرفی (۸۰ > ۲۰).

۱۱.۴.۱۳ مفهوم ۱۱: کاربرد در کنترل کیفیت

مثال: در یک خط تولید، نرخ نقص ٪۵ است. نمونه ۱۰ تایی انتخاب می‌کنیم. احتمال دقیقاً ۱ معیوب:

$$P = \binom{10}{1}(0.05)^1(0.95)^9 = 10 \times 0.05 \times 0.6302 \approx 0.315$$

احتمال حداکثر ۱ معیوب:

$$P = P(0) + P(1) = (0.95)^{10} + 0.315 \approx 0.5987 + 0.315 = 0.9137$$

۱۲.۴.۱۳ مفهوم ۱۲: کاربرد در مدیریت موجودی

مثال: یک فروشگاه می‌داند که تقاضای روزانه با احتمال ۳.۰ برابر ۱۰، با ۵.۰ برابر ۲۰، و با ۲.۰ برابر ۳۰ است. اگر هر واحد موجودی اضافه ۲ هزار ضرر و هر واحد کمبود ۵ هزار ضرر داشته باشد، بهترین سطح موجودی؟

$$E[\text{سود}|Q = 20] = 0.3(10 \times 0) + 0.5(0) + 0.2(-10 \times 5) = -10 \quad (۱۰۳)$$

$$E[\text{سود}|Q = 30] = 0.3(-20 \times 2) + 0.5(-10 \times 2) + 0.2(0) = -12 - 10 = -22 \quad (۱۰۴)$$

بهترین: $Q = 20$ (کمترین ضرر).

۱۳.۴.۱۳ مفهوم ۱۳: کاربرد در انتخاب سبد سرمایه‌گذاری

مثال: از ۵ سهم، می‌خواهیم سبد ۳ تایی بسازیم. تعداد سبدهای ممکن:

$$\binom{5}{3} = 10$$

اگر بخواهیم حتماً سهم A در سبد باشد:

$$\binom{4}{2} = 6$$

۱۴.۴.۱۳ مفهوم ۱۴: کاربرد در بخش‌بندی مشتریان

مثال: از ۱۰۰ مشتری، ۳۰ نفر VIP، ۵۰ نفر عادی، ۲۰ نفر جدید. اگر ۵ نفر تصادفی انتخاب کنیم، احتمال اینکه دقیقاً ۲ VIP باشند:

$$P = \frac{\binom{30}{2}\binom{70}{3}}{\binom{100}{5}} \approx 0.31$$

۱۵.۴.۱۳ مفهوم ۱۵: کاربرد در برنامه‌ریزی شیفت

مثال: یک بیمارستان ۱۵ پرستار دارد. می‌خواهد برای هر روز ۵ پرستار انتخاب کند. تعداد راه‌ها:

$$\binom{15}{5} = 3003$$

اگر ۳ پرستار ارشد باید همیشه باشند:

$$\binom{12}{2} = 66$$

۵.۱۳ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: احتمال کلاسیک ساده
صورت مسئله: در یک کیسه ۵ توپ قرمز و ۳ توپ آبی. احتمال قرمز بودن توپ تصادفی؟
مرحله ۱: کل توپ‌ها: ۸.
مرحله ۲: $P = 5/8 = 0.625$.
نتیجه: ۰.۶۲۵.

مثال حل‌شده

مثال ۲: احتمال با ترکیب
صورت مسئله: از ۸ نفر (۵ مرد، ۳ زن)، تیم ۳ نفره تصادفی. احتمال هر ۳ مرد؟
مرحله ۱: کل: $\binom{8}{3} = 56$.
مرحله ۲: مطلوب: $\binom{5}{3} = 10$.
مرحله ۳: $P = 10/56 \approx 0.1786$.
نتیجه: حدود ۱۷.۹٪.

مثال حل‌شده

مثال ۳: احتمال شرطی
صورت مسئله: در یک شرکت ۲۰۰ کارمند، ۱۲۰ نفر انگلیسی، ۸۰ نفر فرانسه، ۵۰ نفر هر دو. اگر کارمندی فرانسه بلد باشد، احتمال انگلیسی بلد بودن؟
مرحله ۱: $P(F) = 80/200 = 0.4$.
مرحله ۲: $P(E \cap F) = 50/200 = 0.25$.
مرحله ۳: $P(E|F) = 0.25/0.4 = 0.625$.
نتیجه: ۶۲.۵٪.

مثال حل‌شده

مثال ۴: استقلال
صورت مسئله: احتمال موفقیت پروژه A برابر ۰.۵ و پروژه B برابر ۰.۴ (مستقل). احتمال موفقیت حداقل یکی؟
مرحله ۱: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$.
مرحله ۲: $= 0.5 + 0.4 - 0.2 = 0.7$.
نتیجه: ۰.۷.

مثال حل‌شده

مثال ۵: امید ریاضی
صورت مسئله: یک محصول سه سناریو سود دارد: ۵۰ (احتمال ۰.۴)، ۳۰ (احتمال ۰.۳)، −۱۰ (احتمال ۰.۳). امید ریاضی؟
مرحله ۱: $E = 0.4(50) + 0.3(30) + 0.3(-10)$.
مرحله ۲: $= 20 + 9 - 3 = 26$.
نتیجه: ۲۶.

مثال حل‌شده

مثال ۶: درخت تصمیم
صورت مسئله: یک شرکت می‌خواهد محصول جدید معرفی کند. احتمال موفقیت ۰.۵، سود ۱۰۰؛ شکست ۰.۵، ضرر ۴۰. اگر معرفی نکند، ۲۰ سود. تصمیم؟
مرحله ۱: $E[\text{معرفی}] = 0.5(100) + 0.5(-40) = 30$.
مرحله ۲: $E[\text{عدم معرفی}] = 20$.
نتیجه: معرفی ($۳۰ > ۲۰$).

مثال حل‌شده

مثال ۷: بیز
صورت مسئله: در یک کارخانه، خط ۱ (۶۰٪ تولید، نقص ۲٪)، خط ۲ (۴۰٪، نقص ۳٪). اگر محصولی معیوب باشد، احتمال از خط ۱؟
مرحله ۱: $P(\text{نقص}) = 0.6(0.02) + 0.4(0.03) = 0.012 + 0.012 = 0.024$.
مرحله ۲: $P(L_1|D) = 0.012/0.024 = 0.5$.
نتیجه: ۵۰٪.

مثال حل‌شده

مثال ۸: کنترل کیفیت
صورت مسئله: نرخ نقص ۴٪. نمونه ۵ تایی. احتمال دقیقاً ۱ معیوب؟
مرحله ۱: $P = \binom{5}{1}(0.04)^1(0.96)^4$.
مرحله ۲: $= 5 \times 0.04 \times 0.8493 \approx 0.1699$.
نتیجه: حدود ۱۷٪.

مثال حل‌شده

مثال ۹: مدیریت موجودی
صورت مسئله: تقاضا: ۱۰ (احتمال ۰.۲)، ۲۰ (۰.۵)، ۳۰ (۰.۳). موجودی ۲۰. هزینه اضافه ۳ و کمبود ۵. ارزش مورد انتظار؟
مرحله ۱: $E = 0.2(-10 \times 3) + 0.5(0) + 0.3(-10 \times 5)$.
مرحله ۲: $= -6 + 0 - 15 = -21$.
نتیجه: -21.

مثال حل‌شده

مثال ۱۰: انتخاب سبد
صورت مسئله: از ۶ سهم، چند سبد ۳ تایی؟ اگر سهم A حتماً باشد؟
مرحله ۱: کل: $\binom{6}{3} = 20$.
مرحله ۲: با A: $\binom{5}{2} = 10$.
نتیجه: ۲۰ و ۱۰.

مثال حل‌شده

مثال ۱۱: بخش‌بندی مشتریان
صورت مسئله: از ۸۰ مشتری، ۳۰ VIP. اگر ۴ نفر تصادفی، احتمال دقیقاً ۱ VIP؟
مرحله ۱: مطلوب: $\binom{30}{1}\binom{50}{3} = 30 \times 19600 = 588000$.
مرحله ۲: کل: $\binom{80}{4} = 1581580$.
مرحله ۳: $P \approx 0.3717$.
نتیجه: حدود ۳۷٪.

مثال حل‌شده

مثال ۱۲: برنامه‌ریزی شیفت
صورت مسئله: ۱۲ پرستار، انتخاب ۴ نفر. اگر ۲ نفر ارشد همیشه باشند؟
مرحله ۱: ۲ نفر ثابت.
مرحله ۲: $\binom{10}{2} = 45$.
نتیجه: ۴۵ راه.

مثال حل‌شده

مثال ۱۳: احتمال کل
صورت مسئله: سه دستگاه: A (۵۰٪، نقص ۱٪)، B (۳۰٪، ۲٪)، C (۲۰٪، ۴٪). احتمال نقص؟
مرحله ۱: $P = 0.5(0.01) + 0.3(0.02) + 0.2(0.04)$.
مرحله ۲: $= 0.005 + 0.006 + 0.008 = 0.019$.
نتیجه: ۱.۹٪.

مثال حل‌شده

مثال ۱۴: تصمیم با سناریو
صورت مسئله: سه استراتژی: A: سود ۶۰ (خوب ۰.۷) یا ۲۰ (بد ۰.۳)؛ B: سود ۱۰۰ (۰.۷) یا $-$ (۰.۳)؛ C: سود ۷۰ ثابت. کدام بهترین؟
مرحله ۱: $E[A] = 0.7(60) + 0.3(20) = 42 + 6 = 48$.
مرحله ۲: $E[B] = 0.7(100) + 0.3(-50) = 70 - 15 = 55$.
مرحله ۳: $E[C] = 70$.
نتیجه: C بهترین است (۷۰ > ۵۵ > ۴۸).

مثال حل‌شده

مثال ۱۵: احتمال مرکب
صورت مسئله: احتمال بارش باران ۰.۳ و احتمال تأخیر پرواز ۰.۲ (مستقل). احتمال اینکه باران ببارد یا پرواز تأخیر کند؟
مرحله ۱: $P(R \cup D) = 0.3 + 0.2 - 0.3 \times 0.2$.
مرحله ۲: $= 0.5 - 0.06 = 0.44$.
نتیجه: ۰.۴۴.

مثال حل‌شده

مثال ۱۶: کنترل کیفیت پیشرفته
صورت مسئله: نرخ نقص ٪۱۰. نمونه ۴ تایی. احتمال حداکثر ۱ معیوب؟
مرحله ۱: $P(0) = (0.9)^4 = 0.6561$.
مرحله ۲: $P(1) = \binom{4}{1}(0.1)(0.9)^3 = 4 \times 0.1 \times 0.729 = 0.2916$.
مرحله ۳: $P = 0.6561 + 0.2916 = 0.9477$.
نتیجه: ۹۴.۷٪.

مثال حل‌شده

مثال ۱۷: تصمیم چندمرحله‌ای
صورت مسئله: یک شرکت ابتدا تحقیق بازار انجام دهد (هزینه ۱۰)، سپس محصول معرفی کند. احتمال موفقیت با تحقیق ۷۰. (سود ۲۰۰) و بدون تحقیق ۵۰. (سود ۲۰۰). اگر شکست، ضرر ۵۰.
مرحله ۱: با تحقیق: $E = 0.7(200) + 0.3(-50) - 10 = 140 - 15 - 10 = 115$.
مرحله ۲: بدون تحقیق: $E = 0.5(200) + 0.5(-50) = 100 - 25 = 75$.
نتیجه: تحقیق (۱۱۵ > ۷۵).

مثال حل‌شده

مثال ۱۸: انتخاب تأمین‌کننده
صورت مسئله: سه تأمین‌کننده: A (قیمت ۱۰۰، کیفیت ٪۹۵)، B (قیمت ۹۰، ٪۹۰)، C (قیمت ۸۵، ٪۸۵). ارزش مورد انتظار با فرض ارزش کیفیت خوب ۲۰۰؟
مرحله ۱: $E[A] = 0.95(200) - 100 = 90$.
مرحله ۲: $E[B] = 0.90(200) - 90 = 90$.
مرحله ۳: $E[C] = 0.85(200) - 85 = 85$.
نتیجه: A و B برابر، هر دو بهتر از C.

مثال حل‌شده

مثال ۱۹: احتمال با جایگشت
صورت مسئله: ۵ نفر تصادفی در ۵ صندلی می‌نشینند. احتمال اینکه دو نفر خاص کنار هم باشند؟
مرحله ۱: کل چیدمان‌ها: $5! = 120$.
مرحله ۲: دو نفر را یک واحد: ۴ واحد. چیدمان: $4! \times 2 = 48$.
مرحله ۳: $P = 48/120 = 0.4$.
نتیجه: ۴۰.

مثال حل‌شده

مثال ۲۰: تصمیم بازگشتی
صورت مسئله: یک شرکت سه گزینه دارد: بستن خط (سود ۰)، ادامه تولید (سود ۵۰ با احتمال ۴۰.، ضرر ۳۰ با ۶۰.)، ارتقاء (سود ۱۰۰ با ۳۰.، ضرر ۶۰ با ۷۰.). کدام بهتر؟
مرحله ۱: $E[\text{بستن}] = 0$.
مرحله ۲: $E[\text{ادامه}] = 0.4(50) + 0.6(-30) = 20 - 18 = 2$.
مرحله ۳: $E[\text{ارتقاء}] = 0.3(100) + 0.7(-60) = 30 - 42 = -12$.
نتیجه: ادامه تولید (۲).

۶.۱۳ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه ۱: اشتباه بین $P(A \cap B)$ و $P(A \cup B)$.
راه پیشگیری: $\cap$ = «و»، $\cup$ = «یا».
اشتباه ۲: فرض استقلال بدون بررسی.
راه پیشگیری: استقلال را با $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ بررسی کن.
اشتباه ۳: اشتباه در فرمول بیز (جابه‌جا کردن صورت و مخرج).
راه پیشگیری: بیز = $P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$.
اشتباه ۴: فراموش کردن متمم در «حداقل».
راه پیشگیری: «حداقل ۱» = $1 - P(0)$.
اشتباه ۵: اشتباه در امید ریاضی (جمع احتمال‌ها به‌جای ضرب).
راه پیشگیری: $E[X] = \sum x_i P(x_i)$.
اشتباه ۶: فراموش کردن هزینه در تصمیم‌گیری.
راه پیشگیری: هزینه را از ارزش مورد انتظار کم کن.
اشتباه ۷: اشتباه در محاسبه $\binom{n}{r}$ در مسائل احتمال.
راه پیشگیری: کل و مطلوب را جدا محاسبه کن.

۷.۱۳ کاربرد در مدیریت

کاربرد مدیریتی

کاربرد ۱: کنترل کیفیت
محاسبه احتمال وجود محصول معیوب در نمونه‌ها با توزیع دوجمله‌ای.
کاربرد ۲: مدیریت موجودی
تعیین سطح بهینه موجودی با امید ریاضی هزینه‌ها.
کاربرد ۳: انتخاب سبد سرمایه‌گذاری
شمارش ترکیب‌های ممکن و انتخاب بهترین بر اساس بازده مورد انتظار.
کاربرد ۴: بخش‌بندی مشتریان
محاسبه احتمال حضور هر گروه در نمونه‌های تصادفی.
کاربرد ۵: برنامه‌ریزی شیفت
شمارش راه‌های ممکن برای تخصیص کارکنان.
کاربرد ۶: تحلیل ریسک
ارزیابی سناریوها با احتمال و امید ریاضی.
کاربرد ۷: تصمیم‌گیری در عدم قطعیت
استفاده از درخت تصمیم برای انتخاب بهترین استراتژی.
کاربرد ۸: بازاریابی
محاسبه احتمال پاسخ مشتری به کمپین.
کاربرد ۹: مالی
ارزیابی پروژه‌ها با ارزش خالص فعلی مورد انتظار.
کاربرد ۱۰: تولید
محاسبه احتمال تولید محصول سالم در خط تولید.

مفهوم	فرمول	کاربرد
احتمال کلاسیک	$P(A) = \|A\|/\|S\|$	احتمال ساده
احتمال شرطی	$P(A\|B) = P(A \cap B)/P(B)$	اطلاعات اضافی
استقلال	$P(A \cap B) = P(A)P(B)$	رویدادهای مستقل
احتمال کل	$P(A) = \sum P(A\|B_i)P(B_i)$	افراز
بیز	$P(B_i\|A) = \frac{P(A\|B_i)P(B_i)}{P(A)}$	به‌روزرسانی
امید ریاضی	$E[X] = \sum x_i P(x_i)$	میانگین وزنی
ارزش تصمیم	$E[\text{تصمیم}] = \sum(\text{سود} \times P)$	انتخاب بهینه

۸.۱۳ خلاصه فصل

۹.۱۳ خودآزمایی

۱.۹.۱۳ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. پرتاب تاس، احتمال عدد بزرگ‌تر از ۴:

آ) ۱/۶

ب) ۱/۳

ج) ۱/۲

د) ۲/۳

۲. از ۵ مرد و ۳ زن، احتمال انتخاب یک زن:

آ) ۳/۸

ب) ۵/۸

ج) ۳/۵

د) ۵/۳

۳. $P(A) = 0.4$، $P(B) = 0.5$، مستقل. $P(A \cap B)$:

آ) ۱.۰

ب) ۲.۰

ج) ۴.۰

د) ۹.۰

۴. $P(A) = 0.3$، $P(B) = 0.4$، $P(A \cap B) = 0.1$. $P(A|B)$:

آ) ۱.۰

ب) ۲۵.۰

ج) ۳.۰

د) ۴.۰

۵. امید ریاضی پرتاب تاس:

آ) ۳

ب) ۵.۳

ج) ۴

د) ۵.۴

۶. سه دستگاه: A (٪۵۰، نقص ٪۲)، B (٪۵۰، نقص ٪۴). احتمال نقص:

آ) ٪۲

ب) ٪۳

ج) ٪۴

د) ٪۶

۷. در سوال قبل، اگر محصولی معیوب باشد، احتمال از A:

آ) ۱/۳

ب) ۱/۲

ج) ۲/۳

د) ۳/۴

۸. از ۱۰ نفر، تیم ۴ نفره. تعداد راه‌ها:

آ) ۲۱۰

ب) ۵۰۴۰

ج) ۱۰۰۰۰

د) ۱۲۰

۹. در سوال قبل، اگر ۳ نفر خاص همیشه باشند:

آ) ۷

ب) ۱۰

ج) ۲۱

د) ۳۵

۱۰. یک سرمایه‌گذاری: سود ۱۰۰ (۳.۰)، − (۷.۰). امید ریاضی:

آ) −

ب) ۵

ج) ۱۵

د) ۵۰

۱۱. احتمال «حداقل ۱ موفقیت» با $P(\text{موفق}) = 0.2$، ۳ بار مستقل:

آ) ۰.۴۸۸

ب) ۰.۵۱۲

ج) ۰.۶

د) ۰.۸

۱۲. نرخ نقص ٪۵، نمونه ۲ تایی. احتمال هر دو سالم:

آ) ۰.۹

ب) ۰.۹۰۲۵

ج) ۰.۹۵

د) ۰.۹۹

۱۳. در درخت تصمیم، اگر $E[\text{تصمیم A}] = 50$ و $E[\text{تصمیم B}] = 30$، کدام بهتر؟

آ) A

ب) B

ج) برابر

د) بستگی دارد

۱۴. از ۷ نفر، انتخاب ۳ نفر برای رئیس و ۲ عضو: چند راه؟

آ) ۲۱

ب) ۱۰۵

ج) ۲۱۰

د) ۸۴۰

۱۵. احتمال انتخاب ۲ زن از ۳ زن و ۵ مرد:

آ) ۳/۲۸

ب) ۵/۲۸

ج) ۱۰/۲۸

د) ۱۵/۲۸

۲.۹.۱۳ تشریحی (۸ سوال)

۱۶. از ۱۲ کارمند (۷ مرد، ۵ زن)، تیم ۴ نفره. احتمال دقیقاً ۲ زن.
۱۷. نرخ نقص ٪۳. نمونه ۶ تایی. احتمال دقیقاً ۲ معیوب.
۱۸. سه دستگاه: A (٪۴۰، نقص ٪۱)، B (٪۳۵، ٪۲)، C (٪۲۵، ٪۴). اگر محصولی معیوب باشد، احتمال از C.
۱۹. یک پروژه سه سناریو: سود ۱۰۰ (۰.۵)، ۵۰ (۰.۳)، − (۰.۲). امید ریاضی.
۲۰. یک شرکت بین دو گزینه: A (سود ۸۰ با احتمال ۰.۶، ضرر ۲۰ با ۰.۴)، B (سود ۵۰ ثابت). کدام؟
۲۱. از ۱۰ سهم، سبد ۴ تایی. اگر ۲ سهم خاص همیشه باشند.
۲۲. احتمال موفقیت ۰.۳، ۴ بار مستقل. احتمال حداقل ۱ موفقیت.
۲۳. یک فروشگاه تقاضا: ۱۰ (۰.۳)، ۲۰ (۰.۵)، ۳۰ (۰.۲). موجودی ۲۰، هزینه اضافه ۲، کمبود ۶. امید ریاضی.

۱۰.۱۳ پاسخنامه تشریحی

۱. ب) $2/6 = 1/3$ از ۶: $\{5,6\}$.
۲. الف) $3/8$.
۳. ب) $0.4 \times 0.5 = 0.2$.
۴. ب) $0.1/0.4 = 0.25$.
۵. ب) ۵.۳.
۶. ب) $0.5(0.02) + 0.5(0.04) = 0.03 = 3\%$.
۷. الف) $0.5(0.02)/0.03 = 1/3$.
۸. الف) $\binom{10}{4} = 210$.
۹. الف) $\binom{7}{1} = 7$.
۱۰. الف) $0.3(100) + 0.7(-50) = 30 - 35 = -5$.
۱۱. الف) $1 - (0.8)^3 = 1 - 0.512 = 0.488$.
۱۲. ب) $(0.95)^2 = 0.9025$.
۱۳. الف) A بهتر است.
۱۴. ب) $P(7,3) \times \binom{4}{2} = 210 \times 6 = 1260$ (یا بسته به تفسیر: $\binom{6}{2} \times \binom{7}{1} = 105$). پاسخ: ۱۰۵.
۱۵. الف) $3/7 = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{3\times 10}{70}$ (نزدیک‌ترین: ۳/۲۸ نیست). اصلاح: $\binom{8}{4} = 70$، مطلوب $= \binom{3}{2}\binom{5}{2} = 30$. $3/7 = 30/70$. پاسخ دقیق‌تر بین گزینه‌ها نیست، اما نزدیک‌ترین ۱۰/۲۸ ≈ ۳۵۷.۰ (نادرست). پاسخ صحیح: ۳/۷ ≈ ۴۲۹.۰.
۱۶. $P = \frac{\binom{5}{2}\binom{7}{2}}{\binom{12}{4}} = \frac{10\times 21}{495} = \frac{210}{495} \approx 0.424$.
۱۷. $P = \binom{6}{2}(0.03)^2(0.97)^4 \approx 15 \times 0.0009 \times 0.8853 \approx 0.01195$.
۱۸. $P(\text{نقص}) = 0.4(0.01) + 0.35(0.02) + 0.25(0.04) = 0.004 + 0.007 + 0.01 = 0.021$. $P(C|D) = 0.01/0.021 \approx 0.476$.
۱۹. $E = 0.5(100) + 0.3(50) + 0.2(-20) = 50 + 15 - 4 = 61$.
۲۰. $E[A] = 0.6(80) + 0.4(-20) = 48 - 8 = 40$. $E[B] = 50$. B بهتر.
۲۱. $\binom{8}{2} = 28$.
۲۲. $P = 1 - (0.7)^4 = 1 - 0.2401 = 0.7599$.
۲۳. $E = 0.3(-10 \times 2) + 0.5(0) + 0.2(-10 \times 6) = -6 + 0 - 12 = -18$.

۱۱.۱۳ منابع پیشنهادی

- پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. فصل ۹.

- رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. فصل ۹.
- نیکوکار، م. (۱۳۹۷). *ریاضیات عمومی*. فصل ۹.
- T. S. Tan، (۲۰۱۹). *Applied Mathematics for the Managerial، Social and Life Sci-ences*. Ch. ۷–۸.
- A. S. Salzman، (۲۰۱۷). *Mathematics for Business*. Ch. ۸.
- E. Ummer، (۲۰۱۸). *Basic Mathematics for Finance and Business Economics*. Ch. ۸.

ایست بازرسی

پایان فصل ۹ — نسخه توسعه‌یافته
آمار: ~۲۲ صفحه A۴ | ۲۰ مثال حل‌شده | ۲۳ سوال | ۶ منبع

xcolor enumitem booktabs geometry amsmath،amssymb،amsthm [۱۲pt،a۴paper]article
xepersian hyperref tcolorbox
margin=۲.۵cm
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)
فصل ۱۰: حد و خواص آن (نسخه توسعه‌یافته) تیم ۵ نفره معمار آموزشی ۱۳ مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۱۴ فصل ۱۰: حد و خواص آن (نسخه توسعه‌یافته – حجم دوبرابر)

۱.۱۴ چکیده

حد، پل بین جبر مقدماتی و حساب دیفرانسیل است. حد به ما می‌گوید وقتی x به یک مقدار نزدیک می‌شود، تابع $f(x)$ به چه مقداری میل می‌کند — حتی اگر در آن نقطه تعریف نشده باشد. در مدیریت، حد ابزار اصلی تحلیل رفتار توابع در شرایط حدی است: رفتار هزینه در تولید انبوه، رفتار تقاضا در قیمت‌های بسیار بالا، رفتار سود در بلندمدت. در این فصل، مفهوم شهودی حد، تعریف دقیق، خواص، قوانین، حد توابع چندجمله‌ای، گنگ، مثلثاتی، نمایی، لگاریتمی، حد در بی‌نهایت، فرم‌های مبهم، قضیه فشردگی، و کاربردهای گسترده مدیریتی را می‌آموزی. هدف نهایی: بتوانی حد هر تابعی را در هر شرایطی محاسبه کنی و رفتار بلندمدت پدیده‌های مدیریتی را پیش‌بینی کنی.

۲.۱۴ اهداف یادگیری

- **تعریف کند:** حد، حد چپ، حد راست، حد در بی‌نهایت، فرم مبهم، مجانب.
- **محاسبه کند:** حد توابع چندجمله‌ای، گنگ، مثلثاتی، نمایی، لگاریتمی، کسری.
- **تحلیل کند:** رفتار تابع در نزدیکی نقاط خاص، فرم‌های مبهم، حد در بی‌نهایت.
- **به‌کار برد:** قوانین حد برای ساده‌سازی محاسبات پیچیده.
- **مدل‌سازی کند:** رفتار بلندمدت هزینه، درآمد، تقاضا، سود.
- **ارزیابی کند:** وجود یا عدم وجود حد در یک نقطه.

۳.۱۴ مقدمه طنز

تصور کن یک مدیر می‌خواهد بداند «اگر تولید را بی‌نهایت افزایش دهم، هزینه هر واحد چقدر می‌شود؟» اگر بلد نباشد از حد استفاده کند، ممکن است ساده‌لوحانه بگوید «بی‌نهایت» یا «صفر» — در حالی که پاسخ واقعی بستگی به ساختار هزینه دارد. اگر تابع هزینه $C(q) = 1000/q + 5$ باشد، هزینه هر واحد وقتی $q \to \infty$ به ۵ میل می‌کند (هزینه ثابت ۱۰۰۰ در بی‌نهایت محو می‌شود). این همان قدرت حد است.

حد مثل «دوربین تله‌زوم» است: به جای اینکه در نقطه دقیق بایستی، از فاصله نگاه می‌کنی و می‌بینی تابع به کجا می‌رود. حتی اگر آن نقطه سوراخ باشد (تابع تعریف نشده باشد)، دوربین همچنان مسیر را نشان می‌دهد.

نکته طنزآمیز ماجرا اینجاست: بسیاری از افراد فکر می‌کنند «حد همان مقدار تابع در آن نقطه است» و اشتباهاً x را جای‌گذاری می‌کنند. اما در دنیای واقعی، بسیاری از توابع مدیریتی در نقاط خاص تعریف نشده‌اند (مثل $q = 0$ در تابع هزینه هر واحد)، و اینجاست که حد به کمک می‌آید. اگر مدیر این را نداند، ممکن است تصمیم‌های فاجعه‌باری بگیرد — مثلاً فکر کند هزینه هر واحد در تولید صفر، صفر است! این فصل، تو را از «جای‌گذاری کورکورانه» به «تحلیل هوشمندانه رفتار» می‌برد.

۴.۱۴ مفاهیم اصلی

۱.۴.۱۴ مفهوم ۱: مفهوم شهودی حد

تعریف شهودی: حد تابع f در نقطه a، مقداری است که $f(x)$ به آن نزدیک می‌شود وقتی x به a نزدیک می‌شود (بدون اینکه لزوماً برابر a شود):

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

شهود: تصور کن در جاده‌ای به سمت شهری حرکت می‌کنی. حد، «شهری است که به آن نزدیک می‌شوی» — حتی اگر جاده دقیقاً به شهر نرسد.
نکته کلیدی: حد به رفتار تابع در «نزدیکی» نقطه مربوط است، نه در خود نقطه. بنابراین:

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a) \quad \text{(لزوماً)}$$

مثال شهودی: تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ در $x=1$ تعریف نشده (چون مخرج صفر می‌شود). اما اگر x به ۱ نزدیک شود:

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1 \quad (x\neq 1)$$

پس وقتی $x\to 1$، $f(x)\to 2$. یعنی:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

مثال مدیریتی: تابع هزینه هر واحد $AC(q)=\frac{1000}{q}+5$ در $q=0$ تعریف نشده (تقسیم بر صفر). اما:

$$\lim_{q\to\infty} AC(q)=5$$

یعنی در تولید انبوه، هزینه هر واحد به ۵ میل می‌کند.

۲.۴.۱۴ مفهوم ۲: حد چپ و حد راست

تعریف حد چپ: x از سمت چپ (مقادیر کوچک‌تر) به a نزدیک می‌شود:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=L_1$$

تعریف حد راست: x از سمت راست (مقادیر بزرگ‌تر) به a نزدیک می‌شود:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L_2$$

شرط وجود حد: حد در a وجود دارد اگر و تنها اگر:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=L$$

و در این صورت:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

شهود: اگر از دو طرف به یک نقطه بروی و به دو مقصد مختلف برسی، حد وجود ندارد.
مثال ساده: تابع پله‌ای:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 2 & x\geq 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=1, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=2$$

چون دو حد برابر نیستند، $\lim_{x\to 0} f(x)$ وجود ندارد.
مثال مدیریتی: تابع حقوق پله‌ای: اگر فروش کمتر از ۱۰۰ باشد، حقوق ۵؛ اگر بیشتر باشد، حقوق ۵ + ٪۲ مازاد. در نقطه ۱۰۰، حد چپ ۵ و حد راست ۵ است — پس حد وجود دارد و پیوسته است.

۳.۴.۱۴ مفهوم ۳: تعریف دقیق حد (اپسیلون ـ دلتا)

تعریف: $\lim_{x\to a} f(x) = L$ یعنی برای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند $\delta > 0$ وجود دارد که:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

شهود: هر چقدر هم که «دقت» (ε) را زیاد کنی، می‌توانی «فاصله» (δ) را پیدا کنی که تضمین کند $f(x)$ به L نزدیک می‌ماند.
نکته: در این درس، بیشتر از تعریف شهودی و قوانین استفاده می‌کنیم. تعریف دقیق برای درک عمیق‌تر است.

۴.۴.۱۴ مفهوم ۴: قوانین حد

قوانین اصلی:

نام قانون	فرمول
حد ثابت	$\lim_{x\to a} c = c$
حد همانی	$\lim_{x\to a} x = a$
حد جمع	$\lim(f+g) = \lim f + \lim g$
حد تفاضل	$\lim(f-g) = \lim f - \lim g$
حد ضرب	$\lim(f\cdot g) = \lim f \cdot \lim g$
حد تقسیم	$\lim(f/g) = \lim f / \lim g$ (اگر $\lim g \neq 0$)
حد توان	$\lim(f^n) = (\lim f)^n$
حد رادیکال	$\lim \sqrt[n]{f} = \sqrt[n]{\lim f}$
حد تابع مرکب	$\lim f(g(x)) = f(\lim g(x))$

مثال عددی:

$$\lim_{x\to 2}(3x^2 + 4x - 1) = 3(4) + 4(2) - 1 = 12 + 8 - 1 = 19 \quad (۱۰۵)$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6 \quad (۱۰۶)$$

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{x^2+9} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \quad (۱۰۷)$$

۵.۴.۱۴ مفهوم ۵: حد توابع چندجمله‌ای

قضیه: برای هر تابع چندجمله‌ای $P(x)$:

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$$

شهود: چندجمله‌ای‌ها «خوش‌رفتار» هستند ـــ فقط کافی است a را جای‌گذاری کنی.
مثال ساده: $\lim_{x\to 2}(x^3 - 2x + 5) = 8 - 4 + 5 = 9$.
مثال مدیریتی: تابع سود $P(q) = -2q^2 + 40q - 100$. حد در $q = 15$:

$$\lim_{q\to 15} P(q) = -450 + 600 - 100 = 50$$

۶.۴.۱۴ مفهوم ۶: حد توابع کسری و گنگ

روش: اگر با جای‌گذاری مستقیم، فرم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ به دست آمد، باید ساده‌سازی کنیم.
روش‌های ساده‌سازی:

۱. **تجزیه:** برای چندجمله‌ای‌ها.

۲. **گویا کردن:** ضرب در مزدوج برای رادیکال‌ها.

۳. **فاکتورگیری:** برای عبارات مشترک.

مثال ۱ (تجزیه): $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$.

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

مثال ۲ (مزدوج): $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}$$

مثال ۳ (فاکتورگیری): $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$.

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x-2} = \frac{6}{1} = 6$$

مثال مدیریتی: تابع هزینه هر واحد $AC(q) = \frac{q^2+100}{q}$. حد در $q \to 5$:

$$= \frac{25+100}{5} = 25$$

۷.۴.۱۴ مفهوم ۷: حد توابع مثلثاتی

قضیه حد مثلثاتی: اگر a در دامنه تابع مثلثاتی باشد:

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a, \quad \lim_{x\to a} \cos x = \cos a, \quad \lim_{x\to a} \tan x = \tan a$$

حد ویژه (بسیار مهم):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

مثال ساده: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0} 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3$.
مثال: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ (با اتحاد مثلثاتی).

۸.۴.۱۴ مفهوم ۸: حد توابع نمایی و لگاریتمی

حدهای مهم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \tag{۱۰۸}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{۱۰۹}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \tag{۱۱۰}$$

$$\lim_{x\to \infty} e^x = +\infty \tag{۱۱۱}$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^x = 0 \tag{۱۱۲}$$

مثال ساده: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x} = 2\cdot 1 = 2$.
مثال مدیریتی: تابع ارزش فعلی $PV = 100e^{-0.1t}$. حد در $t\to\infty$:

$$\lim_{t\to\infty} PV = 0$$

یعنی در بلندمدت، ارزش فعلی به صفر میل می‌کند.

۹.۴.۱۴ مفهوم ۹: حد در بی‌نهایت

تعریف: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ یعنی وقتی x بسیار بزرگ می‌شود، $f(x)$ به L نزدیک می‌شود.
روش: برای توابع کسری، بر بالاترین توان مخرج تقسیم می‌کنیم.
قضیه: برای $n > 0$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n} = 0$$

حالات حد کسری در بی‌نهایت:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n + \cdots}{b_m x^m + \cdots} = \begin{cases} 0 & n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & n = m \\ \infty & n > m \end{cases}$$

مثال ۱: $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x}{2x^2-1} = \frac{3}{2}$.
مثال ۲: $\lim_{x\to\infty}\frac{5x+1}{x^2+3} = 0$.
مثال ۳: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2}{x+1} = \infty$.
مثال مدیریتی: تابع هزینه متوسط $AC(q) = \frac{1000+5q}{q} = \frac{1000}{q} + 5$. حد در بی‌نهایت:

$$\lim_{q\to\infty} AC(q) = 5$$

یعنی در تولید انبوه، هزینه متوسط به ۵ میل می‌کند (هزینه ثابت محو می‌شود).
مثال مدیریتی: تابع تقاضا $Q(P) = \frac{1000}{P+1}$. حد در $P\to\infty$:

$$\lim_{P\to\infty} Q(P) = 0$$

یعنی با قیمت بسیار بالا، تقاضا به صفر میل می‌کند.

۱۰.۴.۱۴ مفهوم ۱۰: فرم‌های مبهم

تعریف: فرم‌هایی که با جای‌گذاری مستقیم، جواب قطعی نمی‌دهند:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 0^0,\quad 1^\infty,\quad \infty^0$$

روش‌های رفع ابهام:

۱. $\frac{0}{0}$: تجزیه، مزدوج، فاکتورگیری.

۲. $\frac{\infty}{\infty}$: تقسیم بر بالاترین توان.

۳. $0\cdot\infty$: تبدیل به کسری.

۴. $\infty-\infty$: ساده‌سازی جبری.

۵. 1^{∞}: استفاده از $e^{\ln}$.

مثال 1^{∞}: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

مثال مدیریتی: تابع بهره مرکب با n بار مرکب در سال:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}=Pe^{rt}$$

این همان بهره پیوسته است.

۱۱.۴.۱۴ مفهوم ۱۱: قضیه فشردگی (Squeeze Theorem)

تعریف: اگر $g(x)\le f(x)\le h(x)$ در نزدیکی a، و:

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)=L$$

آنگاه:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

شهود: اگر تابعی بین دو تابع «فشرده» باشد و هر دو به یک مقدار میل کنند، آن تابع هم به همان مقدار میل می‌کند.

کاربرد: اثبات $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ با استفاده از نامساوی هندسی.

۱۲.۴.۱۴ مفهوم ۱۲: مجانب‌ها

مجانب عمودی: خط $x=a$ مجانب عمودی است اگر:

$$\lim_{x\to a^{+}} f(x)=\pm\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to a^{-}} f(x)=\pm\infty$$

مجانب افقی: خط $y=L$ مجانب افقی است اگر:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=L$$

مثال: $f(x)=\frac{1}{x-2}$:

- مجانب عمودی: $x=2$.
- مجانب افقی: $y=0$.

مثال مدیریتی: تابع هزینه متوسط $AC(q)=\frac{1000}{q}+5$:

- مجانب عمودی: $q=0$ (هزینه در تولید صفر بی‌نهایت می‌شود — منطقی چون هزینه ثابت تقسیم بر صفر می‌شود).
- مجانب افقی: $AC=5$ (هزینه در تولید انبوه).

۱۳.۴.۱۴ مفهوم ۱۳: حد یک‌طرفه در مدیریت

مثال: تابع حقوق پله‌ای:

$$S(x)=\begin{cases}5 & 0\le x<100\\ 5+0.02(x-100) & x\ge 100\end{cases}$$

در نقطه $x=100$:

$$\lim_{x\to 100^{-}} S(x)=5 \tag{۱۱۳}$$

$$\lim_{x\to 100^{+}} S(x)=5+0=5 \tag{۱۱۴}$$

چون دو حد برابرند، حد وجود دارد و پیوسته است.

۱۴.۴.۱۴ مفهوم ۱۴: کاربرد در تحلیل نهایی

مثال: تابع سود $P(q) = -2q^2 + 40q - 100$. رفتار در بی‌نهایت:

$$\lim_{q \to \infty} P(q) = -\infty$$

یعنی اگر تولید بی‌نهایت شود، سود بی‌نهایت منفی می‌شود (چون هزینه‌های اضافی غالب می‌شوند).

۵.۱۴ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: حد چندجمله‌ای
صورت مسئله: $\lim_{x \to 3}(2x^3 - 5x + 1)$.
مرحله ۱: چندجمله‌ای است، جای‌گذاری مستقیم.
مرحله ۲: $2(27) - 5(3) + 1 = 54 - 15 + 1 = 40$.
نتیجه: ۴۰.

مثال حل‌شده

مثال ۲: حد کسری با فرم مبهم
صورت مسئله: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$.
مرحله ۱: جای‌گذاری: $0/0$ ← فرم مبهم.
مرحله ۲: تجزیه: $\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$.
مرحله ۳: ساده‌سازی: $x + 2 \to 4$.
نتیجه: ۴.

مثال حل‌شده

مثال ۳: حد با مزدوج
صورت مسئله: $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.
مرحله ۱: فرم $0/0$.
مرحله ۲: ضرب در مزدوج: $\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}$.
مرحله ۳: $\frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}$.
مرحله ۴: حد: $1/2$.
نتیجه: $1/2$.

مثال حل‌شده

مثال ۴: حد مثلثاتی ویژه
صورت مسئله: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{2x}$.
مرحله ۱: $\frac{5}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x}$.
مرحله ۲: $\frac{5}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2}$.
نتیجه: $5/2$.

مثال حل‌شده

مثال ۵: حد نمایی

صورت مسئله: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x}$.

مرحله ۱: $= 3 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{3x}$.

مرحله ۲: $= 3 \cdot 1 = 3$.

نتیجه: ۳.

مثال حل‌شده

مثال ۶: حد در بی‌نهایت

صورت مسئله: $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+3x-1}{2x^2-x+5}$.

مرحله ۱: تقسیم بر x^2: $\frac{4+3/x-1/x^2}{2-1/x+5/x^2}$.

مرحله ۲: $\frac{4+0-0}{2-0+0} = 2$.

نتیجه: ۲.

مثال حل‌شده

مثال ۷: حد در بی‌نهایت (مخرج بزرگ‌تر)

صورت مسئله: $\lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{x^2+5}$.

مرحله ۱: تقسیم بر x^2: $\frac{3/x+1/x^2}{1+5/x^2}$.

مرحله ۲: $\frac{0}{1} = 0$.

نتیجه: ۰.

مثال حل‌شده

مثال ۸: حد در بی‌نهایت (صورت بزرگ‌تر)

صورت مسئله: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^2+1}$.

مرحله ۱: تقسیم بر x^2: $\frac{x+1/x^2}{1+1/x^2}$.

مرحله ۲: وقتی $x \to \infty$، صورت $\to \infty$، مخرج $\to 1$.

نتیجه: ∞.

مثال حل‌شده

مثال ۹: فرم 1^∞

صورت مسئله: $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^x$.

مرحله ۱: این فرم 1^∞ است.

مرحله ۲: با تغییر متغیر $n = x/3$: $\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^3 \to e^3$.

نتیجه: $e^3 \approx 20.09$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۰: تابع پله‌ای

صورت مسئله: $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ 3x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$. حد در $x = 2$؟

مرحله ۱: حد چپ: $\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$.

مرحله ۲: حد راست: $\lim_{x \to 2^+} (3x - 2) = 4$.

مرحله ۳: دو حد برابرند.

نتیجه: حد وجود دارد و برابر ۴.

مثال حل‌شده

مثال ۱۱: عدم وجود حد

صورت مسئله: $f(x) = |x|/x$. حد در $x = 0$؟

مرحله ۱: حد چپ: $x < 0 \Rightarrow |x|/x = -1$.

مرحله ۲: حد راست: $x > 0 \Rightarrow |x|/x = 1$.

مرحله ۳: دو حد برابر نیستند.

نتیجه: حد وجود ندارد.

مثال حل‌شده

مثال ۱۲: هزینه متوسط

صورت مسئله: $AC(q) = \frac{2000 + 10q}{q}$. حد در $q \to \infty$.

مرحله ۱: $AC = \frac{2000}{q} + 10$.

مرحله ۲: $\lim_{q \to \infty} = 0 + 10 = 10$.

نتیجه: هزینه متوسط در تولید انبوه به ۱۰ میل می‌کند.

مثال حل‌شده

مثال ۱۳: تقاضا در قیمت بالا

صورت مسئله: $Q(P) = \frac{5000}{P + 10}$. حد در $P \to \infty$.

مرحله ۱: مخرج $\to \infty$، صورت ثابت.

مرحله ۲: $Q \to 0$.

نتیجه: ۰.

مثال حل‌شده

مثال ۱۴: سود بلندمدت

صورت مسئله: $P(q) = -3q^2 + 100q - 200$. حد در $q \to \infty$.

مرحله ۱: جمله غالب $-3q^2$.

مرحله ۲: $P(q) \to -\infty$.

نتیجه: $-\infty$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۵: حد با رادیکال
صورت مسئله: $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.
مرحله ۱: فرم $\infty-\infty$.
مرحله ۲: ضرب در مزدوج: $\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$.
مرحله ۳: تقسیم بر x: $\frac{1}{\sqrt{1+1/x}+1}\to\frac{1}{2}$.
نتیجه: $1/2$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۶: ترکیب مثلثاتی
صورت مسئله: $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$.
مرحله ۱: $\frac{2}{3}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}=$.
مرحله ۲: $=1\cdot1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$.
نتیجه: $2/3$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۷: حد لگاریتمی
صورت مسئله: $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x}$.
مرحله ۱: $=2\cdot\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}$.
مرحله ۲: $=2\cdot1=2$.
نتیجه: ۲.

مثال حل‌شده

مثال ۱۸: فرم $0\cdot\infty$
صورت مسئله: $\lim_{x\to0^+}x\ln x$.
مرحله ۱: تبدیل به کسری: $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x}$.
مرحله ۲: فرم ∞/∞. با هوپیتال (فصل ۱۵): $\frac{1/x}{-1/x^2}=-x\to0$.
نتیجه: ۰.

مثال حل‌شده

مثال ۱۹: تابع با قدر مطلق
صورت مسئله: $\lim_{x\to3}\frac{|x-3|}{x-3}$.
مرحله ۱: حد چپ: $\frac{-(x-3)}{x-3}=-1$.
مرحله ۲: حد راست: $\frac{x-3}{x-3}=1$.
مرحله ۳: دو حد برابر نیستند.
نتیجه: حد وجود ندارد.

مثال حل‌شده

مثال ۲۰: حد پیچیده
صورت مسئله: $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$.
مرحله ۱: تجزیه: $\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$.
مرحله ۲: $= \frac{x^2+x+1}{x+1}$.
مرحله ۳: در $x=1$: $\frac{3}{2}$.
نتیجه: $3/2$.

۶.۱۴ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه ۱: جای‌گذاری مستقیم در فرم مبهم و نوشتن $0/0 = 1$ یا $\infty/\infty = 1$.
راه پیشگیری: فرم مبهم را شناسایی و ساده‌سازی کن.
اشتباه ۲: فرض اینکه حد همیشه برابر مقدار تابع است.
راه پیشگیری: حد و مقدار تابع دو مفهوم جداگانه‌اند.
اشتباه ۳: اشتباه در تقسیم بر بالاترین توان در حد بی‌نهایت.
راه پیشگیری: بالاترین توان مشترک را پیدا کن.
اشتباه ۴: فراموش کردن بررسی حد چپ و راست در توابع پله‌ای.
راه پیشگیری: همیشه دو حد را جدا حساب کن.
اشتباه ۵: اشتباه در علامت در فرم‌های $\infty - \infty$.
راه پیشگیری: با مزدوج یا فاکتورگیری ساده کن.
اشتباه ۶: فرض $\lim(f/g) = \lim f / \lim g$ وقتی $\lim g = 0$.
راه پیشگیری: ابتدا بررسی کن که مخرج به صفر نرود.
اشتباه ۷: اشتباه در حد $\sin x/x$ برای ضرایب مختلف.
راه پیشگیری: از تغییر متغیر $u = kx$ استفاده کن.
اشتباه ۸: فراموش کردن فرم‌های مبهم خاص مثل 1^∞.
راه پیشگیری: همه فرم‌های مبهم را حفظ کن.

۷.۱۴ کاربرد در مدیریت

کاربرد مدیریتی

کاربرد ۱: هزینه متوسط در تولید انبوه
حد تابع هزینه متوسط در بی‌نهایت، «هزینه متغیر هر واحد» را نشان می‌دهد.
کاربرد ۲: تقاضا در قیمت‌های حدی
حد تابع تقاضا در قیمت‌های بسیار بالا یا پایین، رفتار بازار را نشان می‌دهد.
کاربرد ۳: سود بلندمدت
حد تابع سود در بی‌نهایت، سرنوشت بلندمدت کسب‌وکار را مشخص می‌کند.
کاربرد ۴: ارزش فعلی
حد ارزش فعلی در زمان بی‌نهایت (برای پروژه‌های دائمی).
کاربرد ۵: تحلیل نقطه سربه‌سر
حد توابع درآمد و هزینه در نقاط بحرانی.
کاربرد ۶: بهره پیوسته
حد بهره مرکب وقتی تعداد مرکب‌سازی به بی‌نهایت میل کند.
کاربرد ۷: تحلیل ریسک
حد احتمال ورشکستگی در شرایط حدی.
کاربرد ۸: مدل‌سازی رشد
حد توابع رشد نمایی و لجستیک در بلندمدت.
کاربرد ۹: تئوری صف
حد طول صف در نرخ ورودی به نرخ سرویس.
کاربرد ۱۰: اقتصاد خرد
حد مطلوبیت نهایی وقتی مصرف افزایش می‌یابد.

۸.۱۴ خلاصه فصل

مفهوم	فرمول	کاربرد
حد چندجمله‌ای	$\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$	جای‌گذاری مستقیم
حد کسری (فرم مبهم)	ساده‌سازی	تجزیه، مزدوج
حد مثلثاتی ویژه	$\lim_{x\to 0} \sin x/x = 1$	مثلثات
حد نمایی ویژه	$\lim_{x\to 0}(e^x - 1)/x = 1$	مالی
حد در بی‌نهایت	تقسیم بر بالاترین توان	رفتار بلندمدت
فرم 1^∞	$\to e$	بهره پیوسته
حد چپ و راست	$\lim^-$ ،$\lim^+$	توابع پله‌ای
مجانب	حد بی‌نهایت	تحلیل رفتار

۹.۱۴ خودآزمایی

۱.۹.۱۴ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. $\lim_{x\to 2}(3x+1)$:

آ) ۵

ب) ۶

ج) ۷

د) ۸

۲. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$:

آ) ۰

ب) ۳

ج) ۶

د) وجود ندارد

۳. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x}$:

آ) ۰

ب) ۱

ج) ۴

د) ∞

۴. $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+1}{2x^2-3}$:

آ) ۰

ب) $5/2$

ج) $2/5$

د) ∞

۵. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$:

آ) ۰

ب) ۱

ج) ۲

د) e

۶. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{x^2+1}$:

آ) ۰

ب) ۱

ج) ۳

د) ∞

۷. $\lim_{x\to 4} \sqrt{x+5}$:

آ) ۲

ب) ۳

ج) ۴

د) ۹

۸. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$:

آ) ۰

ب) $1/2$

ج) ۱

د) ∞

۹. $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$:

آ) ۱

ب) ۲

ج) e

د) e^2

۱۰. تابع $f(x) = |x|/x$ در $x = 0$:

آ) حد ۱ دارد

ب) حد $-$ دارد

ج) حد ۰ دارد

د) حد ندارد

۱۱. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+1}{x^2+5}$:

آ) ۰

ب) ۲

ج) ∞

د) $-\infty$

۱۲. مجانب افقی $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$:

آ) $y = 0$

ب) $y = 1$

ج) $y = 3$

د) $x = 2$

۱۳. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$:

آ) ۰

ب) ۱

ج) e

د) ∞

۱۴. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$:

آ) ۰

ب) ۱

ج) ∞

د) وجود ندارد

۱۵. تابع هزینه متوسط $AC(q) = \frac{500}{q} + 10$. حد در $q \to \infty$:

آ) ۰

ب) ۵

ج) ۱۰

د) ∞

۲.۹.۱۴ تشریحی (۸ سوال)

۱۶. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$.

۱۷. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$.

۱۸. $\lim_{x\to \infty} \frac{4x^3-2x+1}{2x^3+x^2-5}$.

۱۹. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

۲۰. $\lim_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+2x} - x)$.

۲۱. تابع $f(x) = \begin{cases} x+1 & x<1 \\ 3 & x=1 \\ x^2+2 & x>1 \end{cases}$. حد در $x=1$؟

۲۲. $\lim_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{2x}\right)^{4x}$.

۲۳. تابع هزینه $C(q) = \frac{1000+5q+0.01q^2}{q}$. حد در $q \to \infty$ و تفسیر مدیریتی.

۱۰.۱۴ پاسخنامه تشریحی

۱. ج) $3(2)+1 = 7$.

۲. ج) $\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3 \to 6$.

۳. ج) $4 \cdot \sin(4x)/(4x) \to 4$.

۴. ب) $5/2$.

۵. ج) $2 \cdot (e^{2x}-1)/(2x) \to 2$.

۶. الف) صورت خطی، مخرج درجه ۲: صفر.

۷. ب) $\sqrt{9} = 3$.

۸. ب) مزدوج: $1/2$.
۹. د) e^2.
۱۰. د) حد چپ -1، حد راست $+1$.
۱۱. ج) صورت درجه ۳، مخرج درجه ۲: ∞.
۱۲. ج) نسبت ضرایب: ۳.
۱۳. ب) حد ویژه لگاریتمی: ۱.
۱۴. ب) $\tan x/x = (\sin x/x)(1/\cos x) \to 1$.
۱۵. ج) $0 + 10 = 10$.
۱۶. تجزیه: $\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-3}{x+2} \to \frac{-1}{4}$.
۱۷. مزدوج: $\frac{1}{\sqrt{4+x}+2} \to \frac{1}{4}$ = $\frac{x}{x(\sqrt{4+x}+2)}$.
۱۸. نسبت ضرایب: $4/2 = 2$.
۱۹. $\frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \to \frac{3}{5}$.
۲۰. مزدوج: $\frac{2}{2} = 1 \to \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$.
۲۱. حد چپ: 2. حد راست: 3. دو حد برابر نیستند — حد وجود ندارد.
۲۲. $\left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^2 \to e^2$ =.
۲۳. $C(q) = \frac{1000}{q} + 5 + 0.01q$. حد در بی‌نهایت: $0 + 5 + \infty = \infty$. یعنی هزینه متوسط در تولید انبوه به بی‌نهایت میل می‌کند (چون جمله $0.01q$ غالب می‌شود) — این یعنی در تولید بسیار زیاد، هزینه‌های اضافی غالب می‌شوند و صرفه به مقیاس از بین می‌رود.

۱۱.۱۴ منابع پیشنهادی

- پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. فصل ۱۰.
- رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. فصل ۱۰.
- نیکوکار، م. (۱۳۹۷). *ریاضیات عمومی*. فصل ۱۰.
- T. S. Tan، (۲۰۱۹). *Applied Mathematics for Managerial، Social and Life Sci- ences*. Ch. ۹–۱۰.
- A. S. Salzman، (۲۰۱۷). *Mathematics for Business*. Ch. ۹.
- E. Ummer، (۲۰۱۸). *Basic Mathematics for Finance and Business Economics*، Ch. ۹.

ایست بازرسی

پایان فصل ۱۰ — نسخه توسعه‌یافته
آمار: ∼۲۴ صفحه A۴ | ۲۰ مثال حل‌شده | ۲۳ سوال | ۶ منبع

xcolor enumitem booktabs geometry amsmath،amssymb،amsthm [۱۲pt،a۴paper]article
xepersian hyperref tcolorbox
margin=۲.۵cm
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)
فصل ۱۱ : حد چپ و راست (نسخه توسعه‌یافته) تیم ۵ نفره معمار آموزشی ۱۳ مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۱۵ فصل ۱۱: حد چپ و راست (نسخه توسعه‌یافته – حجم دوبرابر)

۱.۱۵ چکیده

در فصل قبل با مفهوم حد و خواص آن آشنا شدی. حالا می‌خواهیم عمیق‌تر شویم و ببینیم وقتی x از یک سمت خاص به نقطه a نزدیک می‌شود، چه اتفاقی می‌افتد. حد چپ و حد راست، ابزارهای دقیقی هستند که به ما می‌گویند تابع در نزدیکی یک نقطه، از سمت چپ و راست چه رفتاری دارد. این مفهوم، به‌ویژه در توابع پله‌ای، توابع قدر مطلق، توابع تعرفه‌ای، و توابعی که در نقطه‌ای «پرش» دارند، حیاتی است. در این فصل، تعریف دقیق حد چپ و راست، شرط وجود حد، توابع پله‌ای، توابع تعرفه‌ای، توابع قدر مطلق، توابع جزء صحیح، و کاربردهای گسترده مدیریتی را می‌آموزی. هدف نهایی: بتوانی وجود یا عدم وجود حد را در هر نقطه‌ای تعیین کنی و رفتار توابع پله‌ای مدیریتی را تحلیل کنی.

۲.۱۵ اهداف یادگیری

- **تعریف کند:** حد چپ، حد راست، شرط وجود حد، پرش، ناپیوستگی پرشی.
- **محاسبه کند:** حد چپ و راست توابع چندجمله‌ای، کسری، پله‌ای، قدر مطلق، جزء صحیح.
- **تحلیل کند:** وجود یا عدم وجود حد در نقاط بحرانی توابع پله‌ای.
- **تشخیص دهد:** آیا تابع در یک نقطه پیوسته است یا پرش دارد.
- **مدل‌سازی کند:** توابع تعرفه‌ای، حقوق پله‌ای، تخفیف پله‌ای.
- **ارزیابی کند:** تأثیر پرش‌ها بر تصمیم‌گیری مدیریتی.

۳.۱۵ مقدمه طنز

تصور کن یک مدیر فروش می‌خواهد بداند «اگر فروش من دقیقاً ۱۰۰ میلیون تومان باشد، پاداشم چقدر است؟» طبق قرارداد: تا ۱۰۰ میلیون، پاداش ۵ میلیون؛ بیش از ۱۰۰ میلیون، پاداش ۵ میلیون + ٪۲ مازاد. حالا سوال این است: اگر فروش دقیقاً ۱۰۰ میلیون باشد، آیا پاداش ۵ میلیون است یا ۵ میلیون + ۰؟ هر دو جواب یکی است —— پس تابع در ۱۰۰ پیوسته است.

اما اگر قرارداد بگوید: «کمتر از ۱۰۰، پاداش ۵؛ ۱۰۰ و بیشتر، پاداش ۶» —— آنگاه در نقطه ۱۰۰، حد چپ ۵ و حد راست ۶ است. دو حد برابر نیستند، پس حد وجود ندارد و تابع در ۱۰۰ «پرش» دارد. اینجاست که حد چپ و راست، تفاوت بین یک قرارداد عادلانه و یک قرارداد سرگردان‌کننده را نشان می‌دهد.

نکته طنزآمیز ماجرا اینجاست: بسیاری از مدیران فکر می‌کنند «حد همان مقدار تابع است» و به پرش‌ها توجه نمی‌کنند. اما در دنیای واقعی، پرش‌ها می‌توانند باعث سوءتفاهم، شکایت کارمندان، و حتی دعوای حقوقی شوند. مثلاً اگر پاداش در نقطه ۱۰۰ یک‌باره ۱ میلیون بپرد، کارمندی که ۹.۹۹ میلیون فروخته، حس بدی پیدا می‌کند. این فصل، تو را از «غفلت از پرش» به «دقت در مرزها» می‌برد.

۴.۱۵ مفاهیم اصلی

۱.۴.۱۵ مفهوم ۱: تعریف حد چپ

تعریف: حد چپ تابع f در نقطه a، مقداری است که $f(x)$ به آن نزدیک می‌شود وقتی x از سمت چپ (مقادیر کوچک‌تر از a) به a نزدیک می‌شود:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$$

شهود: تصور کن روی خط اعداد ایستاده‌ای و از سمت چپ به سمت a حرکت می‌کنی. حد چپ، مقصد نهایی این حرکت است.
نکته: علامت منفی بالا $(-)$ به معنای «از چپ» است، نه «منفی بودن».
مثال ساده:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ 5 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$$

۲.۴.۱۵ مفهوم ۲: تعریف حد راست

تعریف: حد راست تابع f در نقطه a، مقداری است که $f(x)$ به آن نزدیک می‌شود وقتی x از سمت راست (مقادیر بزرگ‌تر از a) به a نزدیک می‌شود:
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$$

شهود: از سمت راست به سمت a حرکت می‌کنی.
مثال ساده: در همان تابع قبل:
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 5 = 5$$

۳.۴.۱۵ مفهوم ۳: شرط وجود حد

قضیه

حد $\lim_{x \to a} f(x)$ وجود دارد اگر و تنها اگر:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

و در این صورت، مقدار حد برابر L است.

شهود: اگر از دو مسیر مختلف به یک مقصد برسی، حد وجود دارد. اگر به دو مقصد مختلف برسی، حد وجود ندارد.
مثال عددی: در تابع بالا، حد چپ ۴ و حد راست ۵ است. چون برابر نیستند، $\lim_{x \to 2} f(x)$ وجود ندارد.
مثال مدیریتی: در تابع پاداش فروش:

$$S(x) = \begin{cases} 5 & x < 100 \\ 6 & x \geq 100 \end{cases}$$

حد چپ ۵، حد راست ۶ ⟵ پرش در نقطه ۱۰۰.

۴.۴.۱۵ مفهوم ۴: توابع پله‌ای

تعریف: تابعی که در بازه‌هایی ثابت است و در نقاط مرزی «پله» می‌خورد.
مثال ساده:
$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 4 \\ 3 & 4 \leq x < 6 \end{cases}$$

حد در نقاط مرزی:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2 \tag{۱۱۵}$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to 4^+} f(x) = 3 \tag{۱۱۶}$$

در هر دو نقطه، حد وجود ندارد.
مثال مدیریتی: تعرفه پله‌ای برق:

$$C(x) = \begin{cases} 0.5x & 0 \le x \le 100 \\ 50 + 0.8(x-100) & 100 < x \le 200 \\ 130 + 1.2(x-200) & x > 200 \end{cases}$$

۵.۴.۱۵ مفهوم ۵: تابع قدر مطلق

تعریف: $|x| = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$
حد در صفر:

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0 \tag{۱۱۷}$$

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0 \tag{۱۱۸}$$

دو حد برابرند ⟵ پس $\lim_{x\to 0} |x| = 0$.
تابع $|x|/x$:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \tag{۱۱۹}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \tag{۱۲۰}$$

دو حد برابر نیستند ⟵ حد وجود ندارد.

۶.۴.۱۵ مفهوم ۶: تابع جزء صحیح

تعریف: $\lfloor x \rfloor$ = بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x.
حد در اعداد صحیح: برای n صحیح:

$$\lim_{x\to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1 \tag{۱۲۱}$$

$$\lim_{x\to n^+} \lfloor x \rfloor = n \tag{۱۲۲}$$

پس در اعداد صحیح، حد وجود ندارد.
مثال مدیریتی: تعداد بسته‌های کامل:

$$B(x) = \lfloor x/12 \rfloor$$

در $x = 24$: حد چپ $\lfloor 23.99/12 \rfloor = 1$، حد راست $\lfloor 24.01/12 \rfloor = 2$.

۷.۴.۱۵ مفهوم ۷: تابع سقف

تعریف: $\lceil x \rceil$ = کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی x.
حد در اعداد صحیح:

$$\lim_{x \to n^-} \lceil x \rceil = n \tag{۱۲۳}$$

$$\lim_{x \to n^+} \lceil x \rceil = n + 1 \tag{۱۲۴}$$

مثال مدیریتی: تعداد کامیون لازم:

$$T(x) = \lceil x/10 \rceil$$

در $x = 50$: حد چپ $\lceil 49.99/10 \rceil = 5$، حد راست $\lceil 50.01/10 \rceil = 6$.

۸.۴.۱۵ مفهوم ۸: توابع تعرفه‌ای (Tiered Pricing)

تعریف: توابعی که نرخ تغییر در بازه‌های مختلف متفاوت است.
مثال: تعرفه اینترنت:

$$C(x) = \begin{cases} 50 & 0 \le x \le 20 \\ 50 + 3(x - 20) & 20 < x \le 50 \\ 140 + 5(x - 50) & x > 50 \end{cases}$$

بررسی پیوستگی در نقاط مرزی:

$$\lim_{x \to 20^-} C(x) = 50, \quad \lim_{x \to 20^+} C(x) = 50 \tag{۱۲۵}$$

$$\lim_{x \to 50^-} C(x) = 50 + 90 = 140, \quad \lim_{x \to 50^+} C(x) = 140 \tag{۱۲۶}$$

در هر دو نقطه، حد وجود دارد ⟵ تابع پیوسته است.
مثال ناپیوسته:

$$C(x) = \begin{cases} 50 & 0 \le x \le 20 \\ 60 + 3(x - 20) & x > 20 \end{cases}$$

در $x = 20$: حد چپ ۵۰، حد راست ۶۰ ⟵ پرش ۱۰ واحدی.

۹.۴.۱۵ مفهوم ۹: توابع قطعه‌ای (Piecewise Functions)

تعریف: توابعی که با چند فرمول مختلف در بازه‌های مختلف تعریف می‌شوند.
روش بررسی حد:

۱. در هر بازه، فرمول مربوطه را بنویس.

۲. حد چپ و راست را جدا حساب کن.

۳. اگر برابر بودند، حد وجود دارد؛ وگرنه نه.

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 1 \\ 3x - 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 + 1 = 2 \tag{۱۲۷}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3 - 1 = 2 \tag{۱۲۸}$$

دو حد برابرند ⟵ حد وجود دارد و برابر ۲ است.

۱۰.۴.۱۵ مفهوم ۱۰: پرش (Jump)

تعریف: اندازه پرش در نقطه a:

$$\text{پرش} = \left| \lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x) \right|$$

مثال: در تابع پاداش با پرش ۵ به ۶، اندازه پرش ۱ است.

مثال مدیریتی: اگر مالیات در نقطه ۵۰ میلیون از ٪۱۰ به ٪۲۰ بپرد، پرش مالیات:

$$\Delta T = 0.20 \times 50 - 0.10 \times 50 = 5 \text{میلیون}$$

۱۱.۴.۱۵ مفهوم ۱۱: حد چپ و راست در بی‌نهایت

تعریف: گاهی فقط یک سمت در بی‌نهایت معنی دارد.

مثال: $f(x) = \sqrt{x}$:

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

حد چپ در صفر معنی ندارد (چون دامنه $x \geq 0$ است).

مثال مدیریتی: تابع تولید $Q(L) = 10\sqrt{L}$ که L تعداد کارگر است. حد چپ در $L = 0$ معنی ندارد، اما حد راست ۰ است.

۱۲.۴.۱۵ مفهوم ۱۲: حد چپ و راست در توابع نمایی

مثال: $f(x) = e^{1/x}$ در $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = e^{-\infty} = 0 \tag{۱۲۹}$$

$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = e^{+\infty} = +\infty \tag{۱۳۰}$$

حد وجود ندارد.

۱۳.۴.۱۵ مفهوم ۱۳: کاربرد در تحلیل مالیات پله‌ای

مثال: مالیات بر درآمد:

$$T(x) = \begin{cases} 0.10x & 0 \leq x \leq 50 \\ 5 + 0.20(x - 50) & 50 < x \leq 100 \\ 15 + 0.30(x - 100) & x > 100 \end{cases}$$

(ارقام به میلیون تومان)

بررسی پیوستگی:

$$\lim_{x \to 50^-} T(x) = 5, \quad \lim_{x \to 50^+} T(x) = 5 + 0 = 5 \tag{۱۳۱}$$

$$\lim_{x \to 100^-} T(x) = 5 + 10 = 15, \quad \lim_{x \to 100^+} T(x) = 15 \tag{۱۳۲}$$

تابع پیوسته است — نرخ مالیات تغییر می‌کند اما مالیات یک‌باره جهش نمی‌کند.

۱۴.۴.۱۵ مفهوم ۱۴: کاربرد در تحلیل تخفیف پله‌ای

مثال: تخفیف بر اساس حجم خرید:

$$D(x) = \begin{cases} 0 & x < 100 \\ 0.05x & 100 \le x < 500 \\ 0.10x & x \ge 500 \end{cases}$$

در $x = 500$: حد چپ $0.05 \times 500 = 25$، حد راست $0.10 \times 500 = 50$. پرش **۲۵** واحدی!
تفسیر مدیریتی: مشتری ممکن است خرید را از **۴۹۹** به **۵۰۰** برساند تا تخفیف دوبرابر بگیرد.

۱۵.۴.۱۵ مفهوم ۱۵: جدول تشخیص سریع

تابع	حد چپ	حد راست
چندجمله‌ای	$P(a)$	$P(a)$
گویا (مخرج $\neq 0$)	$\frac{P(a)}{Q(a)}$	$\frac{P(a)}{Q(a)}$
$\lvert x\rvert/x$ در 0	-1	$+1$
$\lfloor x \rfloor$ در n	$n-1$	n
$\lceil x \rceil$ در n	n	$n+1$
پله‌ای	مقدار پله چپ	مقدار پله راست

۵.۱۵ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: تابع پله‌ای ساده

صورت مسئله: $f(x) = \begin{cases} 2 & x < 3 \\ 5 & x \ge 3 \end{cases}$. حد چپ و راست در $x = 3$.

مرحله ۱: حد چپ: $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$.
مرحله ۲: حد راست: $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 5$.
نتیجه: حد وجود ندارد (پرش ۳ واحدی).

مثال حل‌شده

مثال ۲: تابع قدر مطلق

صورت مسئله: $\lim_{x \to 0^-} \frac{\lvert x\rvert}{x}$ و $\lim_{x \to 0^+} \frac{\lvert x\rvert}{x}$.
مرحله ۱: برای $x < 0$: $\lvert x\rvert = -x$، پس $\frac{-x}{x} = -1$.
مرحله ۲: برای $x > 0$: $\lvert x\rvert = x$، پس $\frac{x}{x} = 1$.
نتیجه: حد چپ -1، حد راست $+1$.

مثال حل‌شده

مثال ۳: تابع قطعه‌ای

صورت مسئله: $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ 3x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$. حد در $x = 2$.

مرحله ۱: حد چپ: 4.

مرحله ۲: حد راست: $6 - 2 = 4$.

مرحله ۳: دو حد برابرند.

نتیجه: $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$.

مثال حل‌شده

مثال ۴: تابع جزء صحیح

صورت مسئله: $\lim_{x \to 3^-} \lfloor x \rfloor$ و $\lim_{x \to 3^+} \lfloor x \rfloor$.

مرحله ۱: حد چپ: بزرگ‌ترین عدد صحیح کمتر از ۳ منهای epsilon: $\lfloor 2.99 \rfloor = 2$.

مرحله ۲: حد راست: $\lfloor 3.01 \rfloor = 3$.

نتیجه: حد چپ ۲، حد راست ۳.

مثال حل‌شده

مثال ۵: تابع سقف

صورت مسئله: $\lim_{x \to 4^-} \lceil x \rceil$ و $\lim_{x \to 4^+} \lceil x \rceil$.

مرحله ۱: حد چپ: $\lceil 3.99 \rceil = 4$.

مرحله ۲: حد راست: $\lceil 4.01 \rceil = 5$.

نتیجه: حد چپ ۴، حد راست ۵.

مثال حل‌شده

مثال ۶: تعرفه پله‌ای

صورت مسئله: $C(x) = \begin{cases} 100 & 0 \leq x \leq 50 \\ 100 + 3(x - 50) & x > 50 \end{cases}$. حد در $x = 50$.

مرحله ۱: حد چپ: ۱۰۰.

مرحله ۲: حد راست: $100 + 3(0) = 100$.

نتیجه: حد وجود دارد و برابر ۱۰۰ (پیوسته).

مثال حل‌شده

مثال ۷: تعرفه ناپیوسته

صورت مسئله: $C(x) = \begin{cases} 100 & 0 \leq x \leq 50 \\ 120 + 3(x - 50) & x > 50 \end{cases}$. حد در $x = 50$.

مرحله ۱: حد چپ: ۱۰۰.

مرحله ۲: حد راست: ۱۲۰.

نتیجه: حد وجود ندارد (پرش ۲۰ واحدی).

مثال حل‌شده

مثال ۸: پاداش فروش

صورت مسئله: $S(x) = \begin{cases} 5 & x < 100 \\ 5 + 0.02(x - 100) & x \geq 100 \end{cases}$. حد در $x = 100$.

مرحله ۱: حد چپ: ۵.

مرحله ۲: حد راست: ۵.

نتیجه: حد برابر ۵ (پیوسته).

مثال حل‌شده

مثال ۹: ترکیب قدر مطلق

صورت مسئله: $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$ در $x = 2$.

مرحله ۱: حد چپ: $\frac{-(x-2)}{x-2} = -1$.

مرحله ۲: حد راست: $\frac{x-2}{x-2} = +1$.

نتیجه: حد وجود ندارد.

مثال حل‌شده

مثال ۱۰: تابع $e^{1/x}$

صورت مسئله: $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}$ و $\lim_{x\to 0^+} e^{1/x}$.

مرحله ۱: وقتی $x \to 0^-$، $1/x \to -\infty$، پس $e^{1/x} \to 0$.

مرحله ۲: وقتی $x \to 0^+$، $1/x \to +\infty$، پس $e^{1/x} \to +\infty$.

نتیجه: حد چپ ۰، حد راست $+\infty$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۱: تعیین k برای وجود حد

صورت مسئله: $f(x) = \begin{cases} kx + 1 & x < 2 \\ x^2 & x \geq 2 \end{cases}$. k را بیاب تا حد در $x = 2$ وجود داشته باشد.

مرحله ۱: حد چپ: $2k + 1$.

مرحله ۲: حد راست: ۴.

مرحله ۳: $2k + 1 = 4 \Rightarrow k = 3/2$.

نتیجه: $k = 1.5$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۲: مالیات پله‌ای

صورت مسئله: $T(x) = \begin{cases} 0.1x & x \leq 50 \\ 5 + 0.2(x - 50) & x > 50 \end{cases}$. حد در $x = 50$.

مرحله ۱: حد چپ: $0.1(50) = 5$.

مرحله ۲: حد راست: $5 + 0.2(0) = 5$.

نتیجه: پیوسته.

مثال حل‌شده

مثال ۱۳: تابع علامت

صورت مسئله: $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$. حد در $x = 0$.

مرحله ۱: حد چپ: -1.

مرحله ۲: حد راست: $+1$.

نتیجه: حد وجود ندارد.

مثال حل‌شده

مثال ۱۴: تابع $\sin(1/x)$

صورت مسئله: $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$.

مرحله ۱: وقتی $x \to 0$، $1/x \to \infty$ و sin بین -1 و 1 نوسان می‌کند.

مرحله ۲: حد چپ و راست وجود ندارند (نوسانی).

نتیجه: حد وجود ندارد.

مثال حل‌شده

مثال ۱۵: تابع دوضابطه‌ای

صورت مسئله: $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < 1 \\ x^2 + 2 & x \geq 1 \end{cases}$. حد در $x = 1$.

مرحله ۱: حد چپ: $2(1) + 1 = 3$.

مرحله ۲: حد راست: $1 + 2 = 3$.

نتیجه: حد وجود دارد و برابر ۳.

مثال حل‌شده

مثال ۱۶: تخفیف پله‌ای

صورت مسئله: $D(x) = \begin{cases} 0 & x < 100 \\ 0.05x & x \geq 100 \end{cases}$. حد در $x = 100$.

مرحله ۱: حد چپ: ۰.

مرحله ۲: حد راست: $0.05(100) = 5$.

نتیجه: پرش ۵ واحدی.

مثال حل‌شده

مثال ۱۷: تابع $1/(1 + e^{1/x})$

صورت مسئله: حد چپ و راست در $x = 0$.

مرحله ۱: حد چپ: $1/(1 + 0) = 1$.

مرحله ۲: حد راست: $1/(1 + \infty) = 0$.

نتیجه: حد چپ ۱، حد راست ۰.

مثال حل‌شده

مثال ۱۸: تعداد کامیون

صورت مسئله: $T(x) = \lceil x/10 \rceil$. حد چپ و راست در $x = 50$.

مرحله ۱: حد چپ: $\lceil 4.99 \rceil = 5$.

مرحله ۲: حد راست: $\lceil 5.01 \rceil = 6$.

نتیجه: پرش ۱ واحدی.

مثال حل‌شده

مثال ۱۹: تابع سه‌ضابطه‌ای

صورت مسئله: $f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ x^2 + 1 & x > 1 \end{cases}$. حد در $x = 1$.

مرحله ۱: حد چپ: ۱.

مرحله ۲: حد راست: ۲.

نتیجه: حد وجود ندارد.

مثال حل‌شده

مثال ۲۰: تحلیل نقطه پرش

صورت مسئله: در تابع $C(x) = \begin{cases} 50 & x \le 20 \\ 60 + 3(x - 20) & x > 20 \end{cases}$، اندازه پرش در $x = 20$.

مرحله ۱: حد چپ: ۵۰.

مرحله ۲: حد راست: ۶۰.

مرحله ۳: پرش: $|60 - 50| = 10$.

نتیجه: پرش ۱۰ واحدی.

۶.۱۵ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه ۱: فرض وجود حد بدون بررسی دو طرف.
راه پیشگیری: همیشه حد چپ و راست را جدا حساب کن.
اشتباه ۲: اشتباه در علامت $x \to a^-$ و $x \to a^+$.
راه پیشگیری: $-$ یعنی از چپ، $+$ یعنی از راست.
اشتباه ۳: فراموش کردن فرمول $\lfloor x \rfloor$ در اعداد منفی.
راه پیشگیری: $\lfloor -2.5 \rfloor = -3$ (نه -2).
اشتباه ۴: اشتباه در تابع $|x|/x$ (فرض حد وجود دارد).
راه پیشگیری: حد چپ -1، حد راست $+1$.
اشتباه ۵: فراموش کردن دامنه در توابع رادیکالی.
راه پیشگیری: حد چپ در $x = 0$ برای $\sqrt{x}$ معنی ندارد.
اشتباه ۶: اشتباه در تشخیص نوع ناپیوستگی.
راه پیشگیری: پرشی: دو حد متناهی مختلف؛ نامتناهی: حد $\pm\infty$.
اشتباه ۷: فرض پیوستگی در توابع تعرفه‌ای بدون بررسی.
راه پیشگیری: در هر نقطه مرزی، حد چپ و راست را حساب کن.

۷.۱۵ کاربرد در مدیریت

کاربرد مدیریتی

کاربرد ۱: تعرفه‌های پله‌ای
شرکت‌های برق، آب، گاز و اینترنت از توابع پله‌ای استفاده می‌کنند. نقاط پرش، تأثیر مهمی بر مصرف بهینه دارند.
کاربرد ۲: مالیات پله‌ای
در مالیات بر درآمد، نرخ‌ها در نقاط مرزی تغییر می‌کنند. اگر مالیات ناپیوسته باشد، ممکن است فرد انگیزه‌ای برای کم کردن درآمد داشته باشد.
کاربرد ۳: تخفیف‌های پله‌ای
تخفیف بر اساس حجم خرید می‌تواند ناپیوستگی ایجاد کند و مشتری را به خرید بیشتر ترغیب کند.
کاربرد ۴: پاداش فروش
پاداش پله‌ای در نقاط مرزی می‌تواند انگیزه‌های عجیب ایجاد کند (مثلاً فروش را دقیقاً روی نقطه پرش نگه داشتن).
کاربرد ۵: بسته‌بندی و حمل
تابع جزء صحیح و سقف برای محاسبه تعداد بسته و کامیون به کار می‌رود.
کاربرد ۶: تحلیل نقطه سربه‌سر
حد چپ و راست در نقاط مرزی برای تحلیل دقیق سربه‌سر.
کاربرد ۷: قیمت‌گذاری
قیمت‌گذاری پله‌ای برای محصولات دیجیتال (مثل اشتراک نرم‌افزار) از توابع پله‌ای استفاده می‌کند.
کاربرد ۸: مدیریت ظرفیت
در سیستم‌های صف، حد چپ و راست در نقاط ظرفیت بحرانی است.

مفهوم	فرمول	کاربرد
حد چپ	$\lim_{x\to a^-} f(x)$	رفتار از چپ
حد راست	$\lim_{x\to a^+} f(x)$	رفتار از راست
شرط وجود حد	حد چپ $=$ حد راست	پیوستگی
پرش	$\lvert \lim^+ - \lim^- \rvert$	اندازه ناپیوستگی
جزء صحیح	$\lfloor x \rfloor$	بسته‌بندی
سقف	$\lceil x \rceil$	حمل و نقل
قدر مطلق	$\lvert x \rvert / x$	علامت
تعرفه پله‌ای	چندضابطه‌ای	قیمت‌گذاری

۸.۱۵ خلاصه فصل

۹.۱۵ خودآزمایی

۱.۹.۱۵ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ یعنی x از کدام سمت به ۲ نزدیک می‌شود؟

آ) چپ

ب) راست

ج) بالا

د) پایین

۲. در تابع $\begin{cases} 1 & x < 0 \\ 2 & x \geq 0 \end{cases}$، حد چپ در ۰:

آ) ۰

ب) ۱

ج) ۲

د) وجود ندارد

۳. در همان تابع، حد راست در ۰:

آ) ۰

ب) ۱

ج) ۲

د) وجود ندارد

۴. در همان تابع، حد در ۰:

آ) ۰

ب) ۱

ج) ۲

د) وجود ندارد

۵. $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$:

آ) -1

ب) ۰

ج) ۱

د) وجود ندارد

۶. $\lim_{x\to 3^-} \lfloor x \rfloor$:

آ) ۲

ب) ۳

ج) ۴

د) وجود ندارد

۷. $\lim_{x\to 3^+} \lceil x \rceil$:

آ) ۳

ب) ۴

ج) ۵

د) وجود ندارد

۸. تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$ در $x = 1$:

آ) حد ۱ دارد

ب) حد ۲ دارد

ج) حد ندارد

د) حد ۰ دارد

۹. تابع $f(x) = \begin{cases} 3 & x < 2 \\ 5 & x \geq 2 \end{cases}$ اندازه پرش:

آ) ۱

ب) ۲

ج) ۳

د) ۵

۱۰. $\lim_{x\to 0^+} e^{1/x}$:

آ) ۰

ب) ۱

ج) $+\infty$

د) $-\infty$

۱۱. اگر $f(x) = \begin{cases} kx+1 & x<1 \\ x^2+2 & x \geq 1 \end{cases}$، برای وجود حد در $x=1$، k:

آ) ۱

ب) ۲

ج) ۳

د) ۴

۱۲. تابع $\operatorname{sgn}(x)$ در $x=0$:

آ) حد ۱ دارد

ب) حد $-$ دارد

ج) حد ۰ دارد

د) حد ندارد

۱۳. $\lim_{x\to 5^-} \lfloor x/2 \rfloor$:

آ) ۱

ب) ۲

ج) ۳

د) ۴

۱۴. تابع $f(x) = \begin{cases} 0.1x & x \leq 50 \\ 5 + 0.2(x-50) & x > 50 \end{cases}$ در $x=50$:

آ) پیوسته

ب) پرش ۵

ج) پرش ۱۰

د) پرش ۲۰

۱۵. کدام تابع در اعداد صحیح پرش دارد؟

آ) x^2

ب) $\lfloor x \rfloor$

ج) $\sin x$

د) e^x

۲.۹.۱۵ تشریحی (۸ سوال)

۱۶. $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x<2\\ 3x-1 & x\geq 2\end{cases}$. حد در $x=2$.

۱۷. $\frac{|2x|}{x}$ و $\lim_{x\to 0^-}$ $\frac{|2x|}{x}$ $\lim_{x\to 0^+}$.

۱۸. $f(x)=\begin{cases}kx+2 & x<3\\ x^2-1 & x\geq 3\end{cases}$. k را برای وجود حد بیاب.

۱۹. $\lfloor x\rfloor$ $\lim_{x\to 4^-}$ و $\lceil x\rceil$ $\lim_{x\to 4^+}$.

۲۰. تابع $C(x)=\begin{cases}200 & x\leq 100\\ 250+5(x-100) & x>100\end{cases}$. حد چپ، حد راست و پرش در $x=100$.

۲۱. $f(x)=\begin{cases}\sin x & x<0\\ x^2+1 & x\geq 0\end{cases}$. حد در $x=0$.

۲۲. $e^{2/x}$ $\lim_{x\to 0^-}$ و $e^{2/x}$ $\lim_{x\to 0^+}$.

۲۳. تخفیف $D(x)=\begin{cases}0 & x<200\\ 0.1x & x\geq 200\end{cases}$. حد چپ، حد راست و پرش در $x=200$.

۱۰.۱۵ پاسخنامه تشریحی

۱. الف) از چپ.
۲. ب) حد چپ ۱.
۳. ج) حد راست ۲.
۴. د) حد وجود ندارد ($۱\neq ۲$).
۵. الف) -1.
۶. الف) $\lfloor 2.99\rfloor=2$.
۷. ب) $\lceil 3.01\rceil=4$.
۸. الف) حد چپ 1، حد راست 1 — حد ۱.
۹. ب) $|5-3|=2$.
۱۰. ج) $+\infty$.
۱۱. ب) $k+1=3\Rightarrow k=2$.
۱۲. د) حد چپ -1، حد راست $+1$.
۱۳. ب) $\lfloor 4.99/2\rfloor=\lfloor 2.495\rfloor=2$.
۱۴. الف) حد چپ ۵، حد راست ۵ — پیوسته.
۱۵. ب) $\lfloor x\rfloor$.
۱۶. حد چپ: $5=1+4$. حد راست: $5=1-6=$. حد $5=$.
۱۷. برای $x<0$: $|2x|=-2x$، $\frac{-2x}{x}=-2$. برای $x>0$: 2. حد چپ -2، حد راست 2.
۱۸. حد چپ: $3k+2$. حد راست: $9-1=8$. $3k+2=8\Rightarrow k=2$.
۱۹. حد چپ: $\lfloor 3.99\rfloor=3$. حد راست: $\lceil 4.01\rceil=5$.
۲۰. حد چپ: ۲۰۰. حد راست: ۲۵۰. پرش: ۵۰.
۲۱. حد چپ: $\sin 0=0$. حد راست: $1=1+0$. حد وجود ندارد.
۲۲. حد چپ: $e^{-\infty}=0$. حد راست: $e^{+\infty}=+\infty$.
۲۳. حد چپ: ۰. حد راست: $0.1(200)=20$. پرش: ۲۰.

۱۱.۱۵ منابع پیشنهادی

- پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. فصل ۱۱.

- رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. فصل ۱۱.
- نیکوکار، م. (۱۳۹۷). *ریاضیات عمومی*. فصل ۱۱.
- T. S. Tan، (۲۰۱۹). *Applied Mathematics for the Managerial، Social and Life Sci- ences*. Ch. ۱۰.
- A. S. Salzman، (۲۰۱۷). *Mathematics for Business*. Ch. ۹.
- E. Ummer، (۲۰۱۸). *Basic Mathematics for Economics، Business and Finance*. Ch. ۹.

ایست بازرسی

پایان فصل ۱۱ — نسخه توسعه‌یافته
آمار: ~۲۴ صفحه A۴ | ۲۰ مثال حل‌شده | ۲۳ سوال | ۶ منبع

xcolor enumitem booktabs geometry amsmath،amssymb،amsthm [۱۲pt،a۴paper]article
xepersian hyperref tcolorbox
margin=۲.۵cm
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)
فصل ۱۲: پیوستگی (نسخه توسعه‌یافته) تیم ۵ نفره معمار آموزشی ۱۳ مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۱۶ فصل ۱۲: پیوستگی (نسخه توسعه‌یافته – حجم دوبرابر)

۱.۱۶ چکیده

پیوستگی، مفهوم «بدون پرش بودن» یک تابع است. یک تابع پیوسته، مثل جاده‌ای بدون چاله و پرش است: می‌توانی بدون توقف، از هر نقطه به نقطه دیگر بروی. در مدیریت، پیوستگی یعنی «تغییرات تدریجی و قابل پیش‌بینی». تابع هزینه، درآمد، سود و تقاضا معمولاً پیوسته‌اند. اما توابع تعرفه‌ای، مالیات پله‌ای و تخفیف‌های پله‌ای می‌توانند ناپیوسته باشند و همین ناپیوستگی، منشأ تصمیم‌های مهم مدیریتی است. در این فصل، تعریف دقیق پیوستگی، پیوستگی چپ و راست، انواع ناپیوستگی، پیوستگی روی بازه، قضایای پیوستگی، قضیه مقدار میانی، قضیه مقدار اکسترمم، و کاربردهای گسترده مدیریتی را می‌آموزی. هدف نهایی: بتوانی پیوستگی هر تابعی را بررسی کنی و ناپیوستگی‌های مدیریتی را تحلیل کنی.

۲.۱۶ اهداف یادگیری

- **تعریف کند:** پیوستگی در یک نقطه، پیوستگی چپ، پیوستگی راست، پیوستگی روی بازه، ناپیوستگی حذف‌شدنی، پرشی، نامتناهی، نوسانی.
- **تشخیص دهد:** آیا یک تابع در یک نقطه پیوسته است؟ چه نوع ناپیوستگی دارد؟
- **محاسبه کند:** مقادیر پارامترها برای پیوستگی توابع قطعه‌ای.
- **تحلیل کند:** پیوستگی توابع چندجمله‌ای، گویا، رادیکالی، مثلثاتی، نمایی، لگاریتمی، پله‌ای.
- **به‌کار برد:** قضیه مقدار میانی برای اثبات وجود ریشه.
- **مدل‌سازی کند:** توابع تعرفه‌ای، مالیات پله‌ای، تخفیف پله‌ای و نقاط ناپیوستگی.

۳.۱۶ مقدمه طنز

تصور کن یک مدیر می‌خواهد بداند «اگر تولید را از ۹۹ به ۱۰۱ واحد برسانم، هزینه چقدر تغییر می‌کند؟» اگر تابع هزینه پیوسته باشد، تغییر هزینه تدریجی و قابل پیش‌بینی است. اما اگر تابع هزینه ناپیوسته باشد —— مثلاً در تولید ۱۰۰ واحد، یک هزینه ثابت اضافی (مثل اجاره انبار جدید) فعال شود —— آنگاه هزینه یک‌باره جهش می‌کند. اینجاست که مفهوم پیوستگی، تفاوت بین «پیش‌بینی آسان» و «غافلگیری هزینه‌ای» را نشان می‌دهد.

پیوستگی مثل «جاده بدون دست‌انداز» است. اگر جاده پیوسته باشد، با سرعت ثابت پیش می‌روی. اگر ناپیوستگی داشته باشد، ممکن است چرخ ماشین بشکند. در مدیریت، ناپیوستگی‌ها می‌توانند فرصت باشند (مثل تخفیف پله‌ای) یا تهدید (مثل جریمه پله‌ای). مدیر باید بداند کجا ناپیوستگی وجود دارد تا بهترین تصمیم را بگیرد.

نکته طنزآمیز ماجرا اینجاست: بسیاری از افراد فکر می‌کنند «همه توابع مدیریتی پیوسته‌اند» و با جای‌گذاری ساده، همه چیز را حل می‌کنند. اما در دنیای واقعی، تعرفه‌های پله‌ای، مالیات‌های پله‌ای و پاداش‌های پله‌ای، ناپیوستگی‌های مهمی ایجاد می‌کنند. اگر مدیر این ناپیوستگی‌ها را نداند، ممکن است تصمیمی بگیرد که یک‌باره سود را به ضرر تبدیل کند. این فصل، تو را از «تفکر خطی و پیوسته» به «تفکر ناپیوستگی‌شناس» می‌برد.

۴.۱۶ مفاهیم اصلی

۱.۴.۱۶ مفهوم ۱: پیوستگی در یک نقطه

تعریف: تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته است اگر و تنها اگر سه شرط زیر برقرار باشند:

۱. $f(a)$ تعریف شده باشد.

۲. $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود داشته باشد.

۳. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

فرمول:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

شهود: تابع پیوسته در یک نقطه، «بدون سوراخ، بدون پرش، بدون جهش» است. اگر با مداد روی نمودار حرکت کنی، در آن نقطه مجبور نیستی مداد را برداری.

مثال ساده: $f(x) = x^2$ در $x = 2$.

$$f(2) = 4 \tag{۱۳۳}$$

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4 \tag{۱۳۴}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \tag{۱۳۵}$$

پس پیوسته است.

مثال مدیریتی: تابع هزینه $C(q) = 5q + 100$ در $q = 10$ پیوسته است، چون:

$$\lim_{q\to 10} C(q) = 150 = C(10)$$

۲.۴.۱۶ مفهوم ۲: پیوستگی چپ و راست

تعریف پیوستگی راست:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

تعریف پیوستگی چپ:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

قضیه: تابع f در a پیوسته است اگر و تنها اگر هم در a پیوسته راست باشد و هم پیوسته چپ.

مثال ساده: تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0 = f(0)$$

پس در $x = 0$ پیوسته راست است. اما چون دامنه از چپ ندارد، پیوستگی چپ معنی ندارد.

مثال مدیریتی: تابع حقوق پله‌ای:

$$S(x) = \begin{cases} 5 & 0 \le x < 100 \\ 5 + 0.02(x - 100) & x \ge 100 \end{cases}$$

در $x = 100$:

$$\lim_{x\to 100^-} S(x) = 5 \tag{۱۳۶}$$

$$\lim_{x\to 100^+} S(x) = 5 + 0 = 5 \tag{۱۳۷}$$

چون دو حد برابرند، تابع پیوسته است.

نوع ناپیوستگی	تعریف	مثال
حذف‌شدنی (رفع‌شدنی)	حد وجود دارد، اما $f(a)$ تعریف نشده یا $\neq$ حد	$\frac{x^2-1}{x-1}$ در $x=1$
پرشی (جهشی)	حد چپ و راست وجود دارند، اما برابر نیستند	$\frac{\|x\|}{x}$ در $x=0$
نامتناهی	حد $\pm\infty$ است	$\frac{1}{x}$ در $x=0$
نوسانی	حد وجود ندارد (نوسان بی‌پایان)	$\sin(1/x)$ در $x=0$

۳.۴.۱۶ مفهوم ۳: انواع ناپیوستگی

مثال حذف‌شدنی: $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ در $x=1$. $f(1)$ تعریف نشده، اما:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$$

می‌توان با تعریف $f(1)=2$، ناپیوستگی را رفع کرد.

مثال پرشی: $f(x)=\frac{|x|}{x}$ در $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1 \qquad (۱۳۸)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1 \qquad (۱۳۹)$$

حد وجود ندارد، پس ناپیوستگی پرشی است.

مثال نامتناهی: $f(x)=\frac{1}{x-3}$ در $x=3$:

$$\lim_{x\to 3^+}=+\infty,\quad \lim_{x\to 3^-}=-\infty$$

مثال نوسانی: $f(x)=\sin(1/x)$ در $x=0$ نوسان بی‌پایان دارد و حد وجود ندارد.

۴.۴.۱۶ مفهوم ۴: پیوستگی روی بازه

تعریف: تابع f روی بازه باز (a,b) پیوسته است اگر در هر نقطه این بازه پیوسته باشد.

تعریف: تابع f روی بازه بسته $[a,b]$ پیوسته است اگر:

۱. در (a,b) پیوسته باشد.

۲. در a پیوسته راست باشد: $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$.

۳. در b پیوسته چپ باشد: $\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

مثال ساده: $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ روی $[-2,2]$ پیوسته است.

مثال مدیریتی: تابع تقاضا $Q(P)=1000-20P$ روی $[0,50]$ پیوسته است.

۵.۴.۱۶ مفهوم ۵: قضایای پیوستگی

قضیه

اگر f و g در a پیوسته باشند، آنگاه توابع زیر نیز در a پیوسته‌اند:

$$f+g, \quad f-g, \quad f\cdot g, \quad \frac{f}{g}\,(g(a)\neq 0), \quad f^n, \quad \sqrt[n]{f}\,(f(a)\geq 0) \tag{۱۴۰}$$

و همچنین ترکیب $f\circ g$ در a پیوسته است.

توابع پیوسته معروف:

- **چندجمله‌ای‌ها:** در همه جا پیوسته.
- **توابع گویا:** در همه جا به جز ریشه‌های مخرج.
- **رادیکالی:** در دامنه.
- **مثلثاتی:** $\sin x$، $\cos x$ در همه جا؛ $\tan x$ به جز $x=\pi/2+k\pi$.
- **نمایی:** e^x و a^x در همه جا.
- **لگاریتمی:** $\ln x$ و $\log_a x$ برای $x>0$.
- **قدر مطلق:** $|x|$ در همه جا.
- **جزء صحیح:** $\lfloor x\rfloor$ در اعداد صحیح ناپیوسته.

۶.۴.۱۶ مفهوم ۶: پیوستگی توابع قطعه‌ای

روش بررسی: در نقاط مرزی، حد چپ و راست را حساب کن و با مقدار تابع مقایسه کن.

مثال:
$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x<2\\ 3x-2 & x\geq 2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} x^2 = 4 \tag{۱۴۱}$$

$$\lim_{x\to 2^+} (3x-2) = 4 \tag{۱۴۲}$$

$$f(2) = 4 \tag{۱۴۳}$$

پس پیوسته است.

۷.۴.۱۶ مفهوم ۷: قضیه مقدار میانی (IVT)

قضیه

اگر f روی بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد و N عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، آنگاه حداقل یک عدد c در (a,b) وجود دارد که:

$$f(c)=N$$

شهود: اگر تابعی پیوسته از یک مقدار به مقدار دیگر برود، حتماً از همه مقادیر میانی عبور می‌کند.

کاربرد اصلی: اثبات وجود ریشه برای معادلات.
مثال: $f(x) = x^3 + x - 1$ روی $[0, 1]$.

$$f(0) = -1 < 0 \tag{۱۴۴}$$
$$f(1) = 1 > 0 \tag{۱۴۵}$$

پس حداقل یک ریشه در $(0, 1)$ وجود دارد.

۸.۴.۱۶ مفهوم ۸: قضیه مقدار اکسترمم (EVT)

قضیه

اگر f روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه f در این بازه به ماکسیمم و مینیمم مطلق می‌رسد.

کاربرد: در بهینه‌سازی، تضمین وجود جواب بهینه.

۹.۴.۱۶ مفهوم ۹: پیوستگی و حل معادلات

روش دوبخشی: اگر $f(a)$ و $f(b)$ علامت مختلف داشته باشند، ریشه در (a, b) وجود دارد. سپس بازه را نصف می‌کنیم و ادامه می‌دهیم.
مثال: $f(x) = x^3 - x - 2$ روی $[1, 2]$.

$$f(1) = -2 < 0 \tag{۱۴۶}$$
$$f(2) = 4 > 0 \tag{۱۴۷}$$

ریشه در $(1, 2)$.

۱۰.۴.۱۶ مفهوم ۱۰: پیوستگی توابع تعرفه‌ای

مثال: تعرفه برق:

$$C(x) = \begin{cases} 100 & 0 \le x \le 50 \\ 100 + 3(x - 50) & x > 50 \end{cases}$$

در $x = 50$:

$$\lim_{x \to 50^-} C(x) = 100, \quad \lim_{x \to 50^+} C(x) = 100$$

پیوسته است.
مثال ناپیوسته:

$$C(x) = \begin{cases} 100 & 0 \le x \le 50 \\ 120 + 3(x - 50) & x > 50 \end{cases}$$

در $x = 50$، حد چپ ۱۰۰ و حد راست ۱۲۰ است ⟵ ناپیوستگی پرشی.

۱۱.۴.۱۶ مفهوم ۱۱: کاربرد در مدیریت

کاربرد مدیریتی

کاربرد ۱: توابع هزینه و درآمد
این توابع معمولاً پیوسته‌اند و برای تحلیل نقطه سربه‌سر استفاده می‌شوند.
کاربرد ۲: تعرفه‌های پله‌ای
تعرفه برق، آب، گاز و اینترنت می‌توانند پیوسته یا ناپیوسته باشند.
کاربرد ۳: مالیات پله‌ای
مالیات بر درآمد معمولاً ناپیوسته است و در نقاط مرزی جهش دارد.
کاربرد ۴: تخفیف‌های پله‌ای
تخفیف بر اساس حجم خرید می‌تواند ناپیوستگی ایجاد کند.
کاربرد ۵: پاداش فروش
پاداش پله‌ای می‌تواند در نقاط مرزی ناپیوسته باشد.
کاربرد ۶: کنترل کیفیت
پیوستگی تابع احتمال نقص برای تحلیل ریسک.
کاربرد ۷: بهینه‌سازی
قضیه مقدار اکسترمم تضمین می‌کند که بهینه مطلق وجود دارد.
کاربرد ۸: تحلیل ریشه
قضیه مقدار میانی برای یافتن نقطه سربه‌سر.

۵.۱۶ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: بررسی پیوستگی چندجمله‌ای
صورت مسئله: $f(x) = x^2 + 3x - 1$ در $x = 2$.
مرحله ۱: $f(2) = 4 + 6 - 1 = 9$.
مرحله ۲: $\lim_{x \to 2} f(x) = 9$.
نتیجه: پیوسته است.

مثال حل‌شده

مثال ۲: ناپیوستگی حذف‌شدنی
صورت مسئله: $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ در $x = 2$.
مرحله ۱: $f(2)$ تعریف نشده.
مرحله ۲: $\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$.
نتیجه: ناپیوستگی حذف‌شدنی. با تعریف $f(2) = 4$ رفع می‌شود.

مثال حل‌شده

مثال ۳: ناپیوستگی پرشی
صورت مسئله: $f(x) = \frac{|x|}{x}$ در $x = 0$.
مرحله ۱: حد چپ: -1.
مرحله ۲: حد راست: $+1$.
نتیجه: ناپیوستگی پرشی.

مثال حل‌شده

مثال ۴: ناپیوستگی نامتناهی
صورت مسئله: $f(x) = \frac{1}{x-3}$ در $x = 3$.
مرحله ۱: حد چپ: $-\infty$.
مرحله ۲: حد راست: $+\infty$.
نتیجه: ناپیوستگی نامتناهی.

مثال حل‌شده

مثال ۵: پیوستگی تابع پله‌ای
صورت مسئله: $f(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ 3 & x = 1 \\ 4 & x > 1 \end{cases}$ در $x = 1$.
مرحله ۱: حد چپ ۲، حد راست ۴.
مرحله ۲: دو حد برابر نیستند.
نتیجه: ناپیوستگی پرشی.

مثال حل‌شده

مثال ۶: تعیین k برای پیوستگی
صورت مسئله: $f(x) = \begin{cases} kx + 1 & x < 2 \\ x^2 & x \geq 2 \end{cases}$. k را بیاب تا در $x = 2$ پیوسته باشد.
مرحله ۱: حد چپ: $2k + 1$.
مرحله ۲: مقدار راست: $f(2) = 4$.
مرحله ۳: $2k + 1 = 4 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$.
نتیجه: $k = 1.5$.

مثال حل‌شده

مثال ۷: تعیین a, b
صورت مسئله: $f(x) = \begin{cases} ax + b & x < 1 \\ x^2 + 1 & x \geq 1 \end{cases}$. پیوستگی در $x = 1$.
مرحله ۱: حد چپ: $a + b$.
مرحله ۲: $f(1) = 2$.
مرحله ۳: $a + b = 2$. بی‌شمار جواب. مثلاً $a = 1, b = 1$.
نتیجه: رابطه $a + b = 2$.

مثال حل‌شده

مثال ۸: پیوستگی رادیکالی
صورت مسئله: $f(x) = \sqrt{x-1}$ در $x = 1$ و $x = 5$.
مرحله ۱: در $x = 1$: حد راست ۰، $f(1) = 0$ ⟵ پیوسته راست.
مرحله ۲: در $x = 5$: حد ۲، $f(5) = 2$ ⟵ پیوسته.
نتیجه: در دامنه پیوسته.

مثال حل‌شده

مثال ۹: پیوستگی لگاریتمی
صورت مسئله: $f(x) = \ln x$ در $x = 1$.
مرحله ۱: $f(1) = 0$.
مرحله ۲: $\lim_{x\to 1} \ln x = 0$.
نتیجه: پیوسته.

مثال حل‌شده

مثال ۱۰: پیوستگی نمایی
صورت مسئله: $f(x) = e^x$ در $x = 0$.
مرحله ۱: $f(0) = 1$.
مرحله ۲: $\lim_{x\to 0} e^x = 1$.
نتیجه: پیوسته.

مثال حل‌شده

مثال ۱۱: IVT برای وجود ریشه
صورت مسئله: نشان بده $x^3 + x - 1 = 0$ ریشه دارد.
مرحله ۱: $f(0) = -1$، $f(1) = 1$.
مرحله ۲: علامت تغییر می‌کند.
نتیجه: ریشه در $(0, 1)$ وجود دارد.

مثال حل‌شده

مثال ۱۲: IVT برای $\cos x = x$
صورت مسئله: نشان بده $\cos x = x$ جواب دارد.
مرحله ۱: $f(x) = \cos x - x$.
مرحله ۲: $f(0) = 1$، $f(1) = \cos 1 - 1 \approx -0.46$.
نتیجه: ریشه در $(0, 1)$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۳: پیوستگی تابع سود
صورت مسئله: $P(q) = -2q^2 + 40q - 100$ در $q = 10$.
مرحله ۱: $P(10) = 100$.
مرحله ۲: حد در ۱۰ برابر ۱۰۰.
نتیجه: پیوسته.

مثال حل‌شده

مثال ۱۴: ناپیوستگی تابع حقوق

صورت مسئله: $S(x) = \begin{cases} 5 & x < 100 \\ 7 & x \geq 100 \end{cases}$ در $x = 100$.

مرحله ۱: حد چپ ۵، حد راست ۷.

نتیجه: ناپیوستگی پرشی.

مثال حل‌شده

مثال ۱۵: پیوستگی هزینه متوسط

صورت مسئله: $AC(q) = \frac{1000}{q} + 5$ در $q = 10$.

مرحله ۱: $AC(10) = 105$.

مرحله ۲: حد در ۱۰ برابر ۱۰۵.

نتیجه: در دامنه $q > 0$ پیوسته.

مثال حل‌شده

مثال ۱۶: ناپیوستگی حذف‌شدنی

صورت مسئله: $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ در $x = 3$.

مرحله ۱: $f(3)$ تعریف نشده.

مرحله ۲: حد $= 6$.

نتیجه: حذف‌شدنی.

مثال حل‌شده

مثال ۱۷: پیوستگی قطعه‌ای

صورت مسئله: $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$ در $x = 1$.

مرحله ۱: حد چپ ۱.

مرحله ۲: حد راست ۱، $f(1) = 1$.

نتیجه: پیوسته.

مثال حل‌شده

مثال ۱۸: پیوستگی $\sin x/x$

صورت مسئله: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$.

مرحله ۱: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

مرحله ۲: $f(0) = 1$.

نتیجه: پیوسته.

مثال حل‌شده

مثال ۱۹: پیوستگی $(1-\cos x)/x^2$

صورت مسئله: $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x^2} & x\neq 0\\ \frac{1}{2} & x=0\end{cases}$.

مرحله ۱: حد $=\frac{1}{2}$.

مرحله ۲: $f(0)=\frac{1}{2}$.

نتیجه: پیوسته.

مثال حل‌شده

مثال ۲۰: ناپیوستگی تعرفه پله‌ای

صورت مسئله: $C(x)=\begin{cases}100 & 0\le x\le 50\\ 120+3(x-50) & x>50\end{cases}$ در $x=50$.

مرحله ۱: حد چپ ۱۰۰.

مرحله ۲: حد راست ۱۲۰.

نتیجه: ناپیوستگی پرشی.

۶.۱۶ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه ۱: فرض پیوستگی از روی فرمول ظاهری.

راه پیشگیری: همیشه سه شرط پیوستگی را بررسی کن.

اشتباه ۲: اشتباه بین پیوستگی چپ و راست.

راه پیشگیری: در نقاط مرزی، هر دو حد را جدا حساب کن.

اشتباه ۳: فراموش کردن شرط $g(a)\neq 0$ در تقسیم.

راه پیشگیری: ریشه‌های مخرج را پیدا کن.

اشتباه ۴: اشتباه در تشخیص نوع ناپیوستگی.

راه پیشگیری: جدول انواع ناپیوستگی را حفظ کن.

اشتباه ۵: فرض اینکه ناپیوستگی حذف‌شدنی قابل رفع است بدون تعریف مقدار جدید.

راه پیشگیری: مقدار تابع را برابر حد قرار بده.

اشتباه ۶: فراموش کردن دامنه در پیوستگی رادیکال و لگاریتم.

راه پیشگیری: ابتدا دامنه را تعیین کن.

اشتباه ۷: اشتباه در IVT: فرض وجود ریشه بدون بررسی علامت.

راه پیشگیری: ابتدا $f(a)$ و $f(b)$ را حساب کن.

۷.۱۶ کاربرد در مدیریت

کاربرد مدیریتی

کاربرد ۱: تحلیل نقطه سربه‌سر
با IVT می‌توان وجود نقطه سربه‌سر را اثبات کرد.
کاربرد ۲: تعرفه‌های پله‌ای
تعرفه برق، آب، گاز و اینترنت می‌توانند پیوسته یا ناپیوسته باشند.
کاربرد ۳: مالیات پله‌ای
مالیات بر درآمد معمولاً ناپیوسته است و در نقاط مرزی جهش دارد.
کاربرد ۴: تخفیف‌های پله‌ای
تخفیف بر اساس حجم خرید می‌تواند ناپیوستگی ایجاد کند.
کاربرد ۵: پاداش فروش
پاداش پله‌ای می‌تواند در نقاط مرزی ناپیوسته باشد.
کاربرد ۶: کنترل کیفیت
پیوستگی تابع احتمال نقص برای تحلیل ریسک.
کاربرد ۷: بهینه‌سازی
قضیه مقدار اکسترمم تضمین می‌کند که بهینه مطلق وجود دارد.
کاربرد ۸: تحلیل ریشه
قضیه مقدار میانی برای یافتن نقطه سربه‌سر.

۸.۱۶ خلاصه فصل

مفهوم	فرمول / شرط	کاربرد
پیوستگی در نقطه	$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$	بدون پرش
پیوستگی راست	$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$	نقاط مرزی
پیوستگی چپ	$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$	نقاط مرزی
حذف‌شدنی	حد وجود دارد، نه $f(a)$	رفع با تعریف
پرشی	حد چپ $\neq$ حد راست	تعرفه پله‌ای
نامتناهی	$\pm\infty$ حد	مجانب
نوسانی	حد وجود ندارد	$\sin(1/x)$
IVT	f پیوسته، N بین $f(a), f(b)$	وجود ریشه
EVT	f پیوسته روی $[a,b]$	وجود بهینه

۹.۱۶ خودآزمایی

۱.۹.۱۶ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. تابع f در a پیوسته است اگر:

آ) $f(a)$ تعریف شده باشد

ب) $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود داشته باشد

ج) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

د) همه موارد

۲. $f(x) = \frac{1}{x}$ در $x = 0$ چه نوع ناپیوستگی دارد؟

آ) حذف‌شدنی

ب) پرشی

ج) نامتناهی

د) نوسانی

۳. $f(x) = \frac{|x|}{x}$ در $x = 0$:

آ) حذف‌شدنی

ب) پرشی

ج) نامتناهی

د) پیوسته

۴. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ در $x = 1$:

آ) حذف‌شدنی

ب) پرشی

ج) نامتناهی

د) پیوسته

۵. $f(x) = \sqrt{x}$ در $x = 0$:

آ) پیوسته راست

ب) پیوسته چپ

ج) ناپیوسته

د) تعریف نشده

۶. IVT نیاز به کدام شرط دارد؟

آ) پیوستگی روی $[a, b]$

ب) مشتق‌پذیری

ج) یکنوایی

د) محدب بودن

۷. $f(x) = \ln x$ در $x = 0$:

آ) پیوسته

ب) ناپیوستگی نامتناهی

ج) ناپیوستگی پرشی

د) تعریف نشده

۸. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$ در $x = 1$:

آ) پیوسته

ب) ناپیوستگی پرشی

ج) ناپیوستگی حذف‌شدنی

د) ناپیوستگی نامتناهی

۹. $f(x) = \begin{cases} kx + 1 & x < 2 \\ x^2 & x \geq 2 \end{cases}$ برای پیوستگی در $x = 2$، k:

آ) ۱

ب) $3/2$

ج) ۲

د) $5/2$

۱۰. EVT نیاز به کدام شرط دارد؟

آ) پیوستگی روی $[a, b]$

ب) مشتق‌پذیری

ج) یکنوایی

د) محدب بودن

۱۱. کدام تابع در همه جا پیوسته است؟

آ) $\frac{1}{x}$

ب) $\ln x$

ج) $x^2 + 3x$

د) $\lfloor x \rfloor$

۱۲. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ در $x = 2$:

آ) پیوسته

ب) ناپیوستگی پرشی

ج) ناپیوستگی حذف‌شدنی

د) ناپیوستگی نامتناهی

۱۳. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$:

آ) پیوسته

ب) ناپیوستگی پرشی

ج) ناپیوستگی حذف‌شدنی

د) ناپیوستگی نامتناهی

۱۴. $f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ در $x = 0$:

آ) پیوسته

ب) ناپیوستگی پرشی

ج) ناپیوستگی حذف‌شدنی

د) ناپیوستگی نامتناهی

۱۵. برای $f(x) = x^3 + x - 1$، ریشه در کدام بازه است؟

آ) $(-1, 0)$

ب) $(0, 1)$

ج) $(1, 2)$

د) $(2, 3)$

۲.۹.۱۶ تشریحی (۸ سوال)

۱۶. بررسی پیوستگی $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ در $x = 2$.

۱۷. $f(x) = \begin{cases} kx + 1 & x < 2 \\ x^2 & x \geq 2 \end{cases}$. k را بیاب.

۱۸. نشان بده $x^3 - x - 2 = 0$ ریشه در $(1, 2)$ دارد.

۱۹. بررسی پیوستگی $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < 1 \\ 3 & x = 1 \\ x^2 + 2 & x > 1 \end{cases}$ در $x = 1$.

۲۰. تعرفه پله‌ای $C(x) = \begin{cases} 100 & 0 \leq x \leq 50 \\ 120 + 3(x - 50) & x > 50 \end{cases}$ در $x = 50$.

۲۱. $f(x) = \begin{cases} ax + b & x < 1 \\ x^2 + 1 & x \geq 1 \end{cases}$. رابطه a, b برای پیوستگی.

۲۲. نشان بده $f(x) = |x|$ همه جا پیوسته است.

۲۳. نقاط ناپیوستگی $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ را بیاب و نوع آن را مشخص کن.

۱۰.۱۶ پاسخنامه تشریحی

۱. د) هر سه شرط لازم است.
۲. ج) حد $\pm\infty$ — نامتناهی.
۳. ب) حد چپ -1، حد راست $+1$ — پرشی.
۴. الف) حد $=2$، $f(1)$ تعریف نشده — حذف‌شدنی.
۵. الف) در $x=0$ پیوسته راست.
۶. الف) پیوستگی روی $[a,b]$.
۷. ب) $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ — نامتناهی.
۸. الف) حد چپ ۱، حد راست ۱، $f(1)=1$ — پیوسته.
۹. ب) $2k+1=4\Rightarrow k=1.5$.
۱۰. الف) پیوستگی روی $[a,b]$.
۱۱. ج) چندجمله‌ای همه جا پیوسته.
۱۲. ب) در اعداد صحیح پرشی.
۱۳. الف) حد $=1$، $f(0)=1$ — پیوسته.
۱۴. ب) حد چپ ۱، حد راست ۱، $f(0)=0$ — پرشی (چون حد $\neq f(0)$).
۱۵. ب) $f(0)=-1$، $f(1)=1$ — ریشه در $(0,1)$.
۱۶. $f(2)$ تعریف نشده. $\lim_{x\to 2}=4$. ناپیوستگی حذف‌شدنی. با $f(2)=4$ رفع می‌شود.
۱۷. حد چپ $2k+1$، مقدار راست ۴. $2k+1=4\Rightarrow k=3/2$.
۱۸. $f(1)=-2$، $f(2)=4$. علامت تغییر می‌کند. طبق IVT ریشه در $(1,2)$ وجود دارد.
۱۹. حد چپ ۲، حد راست ۳، $f(1)=3$. حد چپ $\neq$ حد راست — ناپیوستگی پرشی.
۲۰. حد چپ ۱۰۰، حد راست ۱۲۰ — ناپیوستگی پرشی.
۲۱. $a+b=2$. بی‌شمار جواب.
۲۲. $|x|$ در $x>0$ برابر x، در $x<0$ برابر $-x$، در $x=0$ برابر ۰. در هر نقطه پیوسته است.
۲۳. $x^2-4=0\Rightarrow x=\pm 2$. در هر دو نقطه، ناپیوستگی نامتناهی.

۱۱.۱۶ منابع پیشنهادی

- پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. فصل ۱۲.
- رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. فصل ۱۲.
- نیکوکار، م. (۱۳۹۷). *ریاضیات عمومی*. فصل ۱۲.
- T. S. Tan، (۲۰۱۹). *Applied Mathematics for the Managerial، Social and Life Sci-ences*. Ch. ۱۱.
- A. S. Salzman، (۲۰۱۷). *Mathematics for Business*. Ch. ۱۰.
- E. Ummer، (۲۰۱۸). *Basic Mathematics for Economics، Finance and Business*. Ch. ۱۰.

ایست بازرسی

پایان فصل ۱۲ — نسخه توسعه‌یافته
آمار: ∼۲۴ صفحه A۴ | ۲۰ مثال حل‌شده | ۲۳ سوال | ۶ منبع

xcolor enumitem booktabs geometry amsmath،amssymb،amsthm [۱۲pt،a۴paper]article
xepersian hyperref tcolorbox
margin=۲.۵cm

فهرست مطالب

۱۷ فصل ۱۳: دنباله‌ها (نسخه توسعه‌یافته — حجم دوبرابر)

۱.۱۷ چکیده

دنباله، فهرستی از اعداد است که با یک نظم خاص پشت‌سرهم می‌آیند. در مدیریت، دنباله‌ها ابزار اصلی مدل‌سازی پدیده‌های زمان‌گسسته هستند: اقساط ماهانه، حقوق سالانه با افزایش پله‌ای، استهلاک سالانه، رشد فروش فصلی، موجودی انبار در پایان هر ماه. در این فصل، تعریف دنباله، دنباله حسابی، دنباله هندسی، دنباله فیبوناچی، همگرایی و واگرایی دنباله‌ها، حد دنباله، دنباله‌های بازگشتی، جمع جملات دنباله، و کاربردهای گسترده مدیریتی را می‌آموزی. هدف نهایی: بتوانی هر پدیده مالی‌ـ‌مدیریتی زمان‌گسسته را با دنباله مدل کنی و رفتار بلندمدت آن را پیش‌بینی کنی.

۲.۱۷ اهداف یادگیری

- **تعریف کند:** دنباله، جمله عمومی، دنباله حسابی، دنباله هندسی، دنباله فیبوناچی، همگرایی، واگرایی، حد دنباله، دنباله بازگشتی.
- **محاسبه کند:** جمله nـام، جمع n جمله اول، نسبت مشترک، قدر نسبت.
- **تحلیل کند:** همگرایی و واگرایی دنباله‌ها، رفتار بلندمدت، حد دنباله.
- **به‌کار برد:** فرمول جمع حسابی و هندسی برای مسائل مالی.
- **مدل‌سازی کند:** اقساط، حقوق پله‌ای، استهلاک، رشد سرمایه، موجودی انبار.
- **ارزیابی کند:** کدام نوع دنباله برای کدام پدیده مدیریتی مناسب‌تر است.

۳.۱۷ مقدمه طنز

تصور کن یک مدیر مالی می‌خواهد بداند «اگر هر سال ٪۱۰ به حقوق کارمندان اضافه کنم، بعد از ۲۰ سال حقوق چقدر می‌شود؟» اگر بلد نباشد از دنباله هندسی استفاده کند، ممکن است ساده‌لوحانه بگوید «۲۰ × ٪۱۰ = ٪۲۰۰ افزایش» —— یعنی حقوق سه برابر می‌شود. اما واقعیت این است که رشد ٪۱۰ سالانه، بعد از ۲۰ سال حقوق را به $1.1^{20} \approx 6.73$ برابر می‌رساند! این تفاوت، همان «قدرت انفجاری دنباله هندسی» است.

دنباله‌ها مثل «قطار اعداد» هستند: هر واگن، یک جمله از دنباله است. اگر واگن‌ها با فاصله ثابت اضافه شوند (مثل ۲، ۴، ۶، ۸)، دنباله حسابی داریم. اگر هر واگن دو برابر واگن قبلی باشد (مثل ۱، ۲، ۴، ۸)، دنباله هندسی داریم. تفاوت بین این دو، تفاوت بین «رشد خطی» و «رشد نمایی» است —— و در دنیای مدیریت، این تفاوت می‌تواند میلیاردها تومان باشد.

نکته طنزآمیز ماجرا اینجاست: بسیاری از مدیران فکر می‌کنند «رشد ٪۱۰ سالانه یعنی هر سال ۱۰ واحد اضافه» و از دنباله حسابی استفاده می‌کنند. اما در دنیای واقعی، حقوق، فروش، سرمایه و تقریباً همه پدیده‌های مالی، با دنباله هندسی رشد می‌کنند —— یعنی سود روی سود می‌نشیند. اگر مدیر این را نداند، پیش‌بینی‌هایش فاجعه‌بار اشتباه می‌شود. این فصل، تو را از «تفکر خطی» به «تفکر هندسی و نمایی» می‌برد.

۴.۱۷ مفاهیم اصلی

۱.۴.۱۷ مفهوم ۱: تعریف دنباله

تعریف: دنباله، تابعی است از اعداد طبیعی به اعداد حقیقی:

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad a(n) = a_n$$

که a_n را «جمله nـام» یا «جمله عمومی» می‌نامیم.
نمایش: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ یا $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

شهود: دنباله مثل یک لیست بی‌پایان از اعداد است که با یک نظم خاص مرتب شده‌اند.
انواع دنباله:

- **متناهی:** تعداد جملات محدود است.
- **نامتناهی:** تعداد جملات بی‌نهایت است.
- **صعودی:** $a_{n+1} > a_n$ برای همه n.
- **نزولی:** $a_{n+1} < a_n$ برای همه n.
- **ثابت:** $a_{n+1} = a_n$ برای همه n.
- **متناوب:** علامت‌ها یکی‌درمیان تغییر می‌کنند.

مثال ساده: $a_n = 2n$: $2, 4, 6, 8, \ldots$ (صعودی).
مثال ساده: $a_n = 1/n$: $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ (نزولی).
مثال مدیریتی: فروش ماهانه یک شرکت: ۱۰۰، ۱۲۰، ۱۴۰، ۱۶۰ میلیون (دنباله حسابی با اختلاف ۲۰).

۲.۴.۱۷ مفهوم ۲: دنباله حسابی

تعریف: دنباله‌ای که اختلاف هر جمله با جمله قبلی ثابت است:

$$a_{n+1} - a_n = d$$

که d را «قدر اختلاف» یا «تفاضل مشترک» می‌نامیم.
جمله عمومی:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

شهود: مثل پله‌های یک نردبان با فاصله ثابت.
جمع n جمله اول:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

مثال ساده: $a_1 = 3$، $d = 4$. جمله پنجم:

$$a_5 = 3 + 4(4) = 19$$

جمع ۵ جمله اول:

$$S_5 = \frac{5}{2}(3 + 19) = 55$$

مثال مدیریتی: حقوق سالانه یک کارمند که سال اول ۶۰ میلیون و هر سال ۵ میلیون اضافه می‌شود:

$$a_n = 60 + 5(n-1)$$

حقوق سال دهم: $a_{10} = 60 + 45 = 105$ میلیون. جمع کل حقوق ۱۰ سال:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(60 + 105) = 825 \text{میلیون}$$

خواص دنباله حسابی:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{(میانگین حسابی)} \tag{۱۴۸}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \tag{۱۴۹}$$

$$a_m - a_k = (m-k)d \tag{۱۵۰}$$

۳.۴.۱۷ مفهوم ۳: دنباله هندسی

تعریف: دنباله‌ای که نسبت هر جمله به جمله قبلی ثابت است:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

که r را «قدر نسبت» می‌نامیم.

جمله عمومی:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

شهود: مثل رشد باکتری که هر ساعت دو برابر می‌شود.

جمع n جمله اول:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} \quad (r \neq 1)$$

جمع بی‌نهایت (اگر $|r| < 1$):

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$$

مثال ساده: $a_1 = 2$، $r = 3$. جمله پنجم:

$$a_5 = 2 \cdot 3^4 = 162$$

جمع ۵ جمله:

$$S_5 = 2 \cdot \frac{1 - 3^5}{1 - 3} = 2 \cdot \frac{1 - 243}{-2} = 242$$

مثال مدیریتی: حقوق سالانه با ٪۱۰ افزایش سالانه. اگر سال اول ۶۰ میلیون باشد:

$$a_n = 60 \cdot (1.1)^{n-1}$$

حقوق سال دهم: $a_{10} = 60 \cdot (1.1)^9 \approx 60 \times 2.3579 \approx 141.48$ میلیون. جمع کل حقوق ۱۰ سال:

$$S_{10} = 60 \cdot \frac{1 - (1.1)^{10}}{1 - 1.1} = 60 \cdot \frac{1 - 2.5937}{-0.1} = 60 \times 15.937 \approx 956.2 \text{میلیون}$$

خواص دنباله هندسی:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad (\text{میانگین هندسی، برای } a_n > 0) \tag{۱۵۱}$$

$$\frac{a_m}{a_k} = r^{m-k} \tag{۱۵۲}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} \quad (|r| < 1) \tag{۱۵۳}$$

۴.۴.۱۷ مفهوم ۴: تفاوت دنباله حسابی و هندسی

نکته کلیدی: در بلندمدت، دنباله هندسی با $r > 1$ از هر دنباله حسابی «سبقت» می‌گیرد.

ویژگی	حسابی	هندسی
رابطه بازگشتی	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_{n+1} = a_n \cdot r$
جمله عمومی	$a_1 + (n-1)d$	$a_1 \cdot r^{n-1}$
نوع رشد	خطی	نمایی
جمع n جمله	$\frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	$a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$
مثال مدیریتی	حقوق پله‌ای ثابت	بهره مرکب
رفتار بلندمدت	خطی	انفجاری یا زوالی

۵.۴.۱۷ مفهوم ۵: دنباله فیبوناچی

تعریف: دنباله‌ای که هر جمله، جمع دو جمله قبلی است:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1$$

جملات: ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵، ...
شهود: الگوی رشد جمعیت خرگوش‌ها (مسئله اصلی فیبوناچی).
کاربرد مدیریتی: مدل‌سازی رشد جمعیت، پیش‌بینی تقاضا با الگوی خاص، تحلیل بازارهای مالی (نسبت طلایی 1.618).
نسبت طلایی:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

۶.۴.۱۷ مفهوم ۶: همگرایی و واگرایی دنباله

تعریف همگرایی: دنباله $\{a_n\}$ همگرا به L است اگر:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

یعنی وقتی n بزرگ می‌شود، a_n به L نزدیک می‌شود.
تعریف واگرایی: دنباله‌ای که همگرا نباشد، واگرا است. دو نوع:

- **واگرایی به $\pm\infty$:** $a_n \to \infty$.
- **واگرایی نوسانی:** مثل $(-1)^n$ که بین -1 و 1 نوسان می‌کند.

همگرایی دنباله هندسی:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & |r| < 1 \\ 1 & r = 1 \\ +\infty & r > 1 \\ \text{وجود ندارد} & r \leq -1 \end{cases}$$

مثال ساده: $a_n = \frac{1}{n}$: همگرا به ۰.
مثال ساده: $a_n = 2n$: واگرا به $+\infty$.
مثال ساده: $a_n = (-1)^n$: واگرا (نوسانی).
مثال مدیریتی: ارزش فعلی اقساط بی‌نهایت با نرخ $r < 1$: همگرا به یک مقدار محدود.

۷.۴.۱۷ مفهوم ۷: قوانین حد دنباله

قضیه

اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = B$، آنگاه:

$$\lim(a_n + b_n) = A + B \quad (۱۵۴)$$

$$\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B \quad (۱۵۵)$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0) \quad (۱۵۶)$$

$$\lim(c \cdot a_n) = c \cdot A \quad (۱۵۷)$$

قضیه فشردگی: اگر $a_n \leq b_n \leq c_n$ و حد دو طرف برابر L باشد، حد وسط هم L است.
مثال: $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n}{5n^2-1} = \frac{3}{5}$ (تقسیم بر n^2).

۸.۴.۱۷ مفهوم ۸: دنباله‌های بازگشتی

تعریف: دنباله‌ای که هر جمله از جملات قبلی محاسبه می‌شود.
مثال: $a_1 = 1$، $a_n = 2a_{n-1} + 1$: ۱، ۳، ۷، ۱۵، ...
کاربرد مدیریتی: مدل‌سازی موجودی انبار با ورودی و خروجی:

$$I_n = I_{n-1} + \text{ورودی}_n - \text{خروجی}_n$$

۹.۴.۱۷ مفهوم ۹: میانگین‌های حسابی و هندسی

میانگین حسابی: $A = \frac{a+b}{2}$.
میانگین هندسی: $G = \sqrt{ab}$.
نامساوی: $A \geq G$ (برای $a, b > 0$).
کاربرد مدیریتی: میانگین حسابی برای نرخ‌های خطی؛ میانگین هندسی برای نرخ‌های رشد (بازده سرمایه‌گذاری).

۱۰.۴.۱۷ مفهوم ۱۰: کاربرد در بهره مرکب

فرمول: اگر سرمایه اولیه P با نرخ r سالانه رشد کند:

$$A_n = P(1 + r)^n$$

این یک دنباله هندسی با r = نسبت رشد است.
مثال مدیریتی: ۱۰۰ میلیون با ٪۱۵ سالانه. بعد از ۵ سال:

$$A_5 = 100 \cdot (1.15)^5 \approx 201.14 \text{میلیون}$$

۱۱.۴.۱۷ مفهوم ۱۱: کاربرد در اقساط

تعریف: اگر وامی با مبلغ P، نرخ ماهانه r، و n قسط باشد، قسط ماهانه:

$$A = \frac{P \cdot r}{1 - (1 + r)^{-n}}$$

مثال مدیریتی: وام ۱۰۰ میلیون، نرخ ماهانه ٪۱، ۶۰ قسط:

$$A = \frac{100 \cdot 0.01}{1 - (1.01)^{-60}} = \frac{1}{1 - 0.5504} = \frac{1}{0.4496} \approx 2.224 \text{میلیون}$$

۱۲.۴.۱۷ مفهوم ۱۲: کاربرد در ارزش فعلی

تعریف: ارزش فعلی جریان نقدی C در n دوره بعد با نرخ r:

$$PV = \frac{C}{(1+r)^n}$$

مثال مدیریتی: پروژه‌ای که سالانه ۵۰ میلیون برای ۱۰ سال می‌دهد، با نرخ ٪۱۲:

$$PV = \sum_{n=1}^{10} \frac{50}{(1.12)^n} = 50 \cdot \frac{1-(1.12)^{-10}}{0.12} \approx 50 \times 5.6502 \approx 282.5 \text{میلیون}$$

۱۳.۴.۱۷ مفهوم ۱۳: کاربرد در استهلاک

روش خط مستقیم (حسابی):

$$D_n = D_0 - n \cdot \frac{D_0 - D_s}{N}$$

که D_s ارزش اسقاط و N عمر مفید.

روش نزولی (هندسی):

$$D_n = D_0(1-d)^n$$

مثال: خودرویی به قیمت ۵۰۰ میلیون با استهلاک ٪۲۰ سالانه. بعد از ۵ سال:

$$D_5 = 500 \cdot (0.8)^5 \approx 163.84 \text{میلیون}$$

۱۴.۴.۱۷ مفهوم ۱۴: کاربرد در پیش‌بینی فروش

مثال: اگر فروش سال اول ۱۰۰ میلیون و رشد سالانه ٪۸ باشد:

$$S_n = 100 \cdot (1.08)^{n-1}$$

فروش سال دهم: $S_{10} = 100 \cdot (1.08)^9 \approx 199.9$ میلیون.

۱۵.۴.۱۷ مفهوم ۱۵: جمع جملات دنباله در مدیریت

مثال: مجموع کل فروش ۱۰ سال اول با فروش سال اول ۱۰۰ و رشد ٪۸:

$$S_{10} = 100 \cdot \frac{1-(1.08)^{10}}{1-1.08} \approx 100 \times 14.487 \approx 1448.7 \text{میلیون}$$

۵.۱۷ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: دنباله حسابی — جمله عمومی
صورت مسئله: $a_1 = 5$، $d = 3$. a_{10} را بیاب.
مرحله ۱: $a_n = a_1 + (n-1)d$.
مرحله ۲: $a_{10} = 5 + 9 \times 3 = 32$.
نتیجه: ۳۲.

مثال حل‌شده

مثال ۲: دنباله حسابی — جمع
صورت مسئله: جمع ۲۰ جمله اول دنباله $a_n = 3 + 2(n-1)$.
مرحله ۱: $a_1 = 3$، $a_{20} = 3 + 2 \times 19 = 41$.
مرحله ۲: $S_{20} = \frac{20}{2}(3 + 41) = 440$.
نتیجه: ۴۴۰.

مثال حل‌شده

مثال ۳: دنباله هندسی — جمله عمومی
صورت مسئله: $a_1 = 4$، $r = 2$. a_8 را بیاب.
مرحله ۱: $a_n = a_1 r^{n-1}$.
مرحله ۲: $a_8 = 4 \cdot 2^7 = 512$.
نتیجه: ۵۱۲.

مثال حل‌شده

مثال ۴: دنباله هندسی — جمع
صورت مسئله: جمع ۶ جمله اول $a_1 = 2$، $r = 3$.
مرحله ۱: $S_6 = 2 \cdot \frac{1-3^6}{1-3}$.
مرحله ۲: $S_6 = 2 \cdot \frac{1-729}{-2} = 728$.
نتیجه: ۷۲۸.

مثال حل‌شده

مثال ۵: جمع بی‌نهایت
صورت مسئله: $\sum_{n=1}^{\infty} 8 \cdot (1/2)^n$.
مرحله ۱: $a_1 = 4$، $r = 1/2$.
مرحله ۲: $S_\infty = \frac{4}{1-1/2} = 8$.
نتیجه: ۸.

مثال حل‌شده

مثال ۶: حقوق با افزایش ثابت
صورت مسئله: حقوق سال اول ۶۰ میلیون، سالانه ۵ میلیون اضافه. حقوق سال ۱۵ و جمع ۱۵ سال.
مرحله ۱: $a_{15} = 60 + 14 \times 5 = 130$.
مرحله ۲: $S_{15} = \frac{15}{2}(60 + 130) = 1425$.
نتیجه: حقوق ۱۳۰، جمع ۱۴۲۵ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۷: حقوق با رشد درصدی
صورت مسئله: حقوق سال اول ۶۰ میلیون، سالانه ٪۸ رشد. حقوق سال ۱۰ و جمع ۱۰ سال.
مرحله ۱: $a_{10} = 60 \cdot (1.08)^{9} \approx 60 \times 1.9990 \approx 119.94$.
مرحله ۲: $S_{10} = 60 \cdot \frac{1-(1.08)^{10}}{1-1.08} \approx 60 \times 14.4866 \approx 869.2$.
نتیجه: حقوق ۱۲۰، جمع ۸۶۹ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۸: بهره مرکب
صورت مسئله: ۲۰۰ میلیون با ٪۱۲ سالانه. بعد از ۸ سال.
مرحله ۱: $A_8 = 200 \cdot (1.12)^{8}$.
مرحله ۲: $(1.12)^{8} \approx 2.4760$.
مرحله ۳: $A_8 \approx 495.2$ میلیون.
نتیجه: ۲.۴۹۵ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۹: استهلاک هندسی
صورت مسئله: دستگاه ۸۰۰ میلیون با استهلاک ٪۲۵. بعد از ۶ سال.
مرحله ۱: $D_6 = 800 \cdot (0.75)^{6}$.
مرحله ۲: $(0.75)^{6} \approx 0.1780$.
مرحله ۳: $D_6 \approx 142.4$ میلیون.
نتیجه: ۴.۱۴۲ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۱۰: ارزش فعلی جریان نقدی
صورت مسئله: ۱۰۰ میلیون در ۵ سال آینده، نرخ ٪۱۰.
مرحله ۱: $PV = 100/(1.10)^{5}$.
مرحله ۲: $(1.10)^{5} \approx 1.6105$.
مرحله ۳: $PV \approx 62.09$ میلیون.
نتیجه: ۱.۶۲ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۱۱: همگرایی دنباله
صورت مسئله: $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-5}$.
مرحله ۱: تقسیم بر n: $\frac{3+1/n}{2-5/n}$.
مرحله ۲: حد: $3/2$.
نتیجه: $3/2$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۲: همگرایی هندسی
صورت مسئله: $\lim_{n\to\infty}(0.8)^n$.
مرحله ۱: $|0.8|<1$، پس $r^n\to 0$.
نتیجه: ۰.

مثال حل‌شده

مثال ۱۳: واگرایی
صورت مسئله: $\lim_{n\to\infty}(1.2)^n$.
مرحله ۱: $|1.2|>1$، پس $r^n\to\infty$.
نتیجه: $+\infty$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۴: قسط وام
صورت مسئله: وام ۲۰۰ میلیون، نرخ ماهانه ۰.۸٪، ۱۲۰ قسط. قسط ماهانه.
مرحله ۱: $A=\frac{200\cdot 0.008}{1-(1.008)^{-120}}$.
مرحله ۲: $(1.008)^{120}\approx 2.6039$.
مرحله ۳: $A=\frac{1.6}{1-0.3840}=\frac{1.6}{0.6160}\approx 2.597$ میلیون.
نتیجه: حدود ۶.۲ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۱۵: رشد فروش
صورت مسئله: فروش سال اول ۵۰۰ میلیون، رشد ۱۵٪. فروش سال ۸.
مرحله ۱: $S_8=500\cdot(1.15)^7$.
مرحله ۲: $(1.15)^7\approx 2.6600$.
مرحله ۳: $S_8\approx 1330$ میلیون.
نتیجه: ۳۳.۱ میلیارد.

مثال حل‌شده

مثال ۱۶: جمع فروش
صورت مسئله: در مثال قبل، جمع فروش ۸ سال.
مرحله ۱: $S_8=500\cdot\frac{1-(1.15)^8}{1-1.15}$.
مرحله ۲: $(1.15)^8\approx 3.0590$.
مرحله ۳: $S=500\cdot\frac{1-3.0590}{-0.15}=500\times 13.727\approx 6863.5$.
نتیجه: ۸۶.۶ میلیارد.

مثال حل‌شده

مثال ۱۷: میانگین هندسی رشد
صورت مسئله: فروش ۴ سال: ۱۰۰، ۱۲۰، ۱۵۰، ۱۸۰. نرخ رشد متوسط سالانه.
مرحله ۱: نسبت کل: $180/100 = 1.8$.
مرحله ۲: میانگین هندسی: $r = (1.8)^{1/3} \approx 1.2164$.
نتیجه: رشد متوسط ۲۱.۶۴٪.

مثال حل‌شده

مثال ۱۸: دنباله فیبوناچی
صورت مسئله: جمله دهم فیبوناچی.
مرحله ۱: ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵.
نتیجه: ۵۵.

مثال حل‌شده

مثال ۱۹: دنباله بازگشتی موجودی
صورت مسئله: موجودی اولیه ۱۰۰، ورودی ماهانه ۵۰، خروجی ماهانه ۶۰. موجودی ماه ۱۲.
مرحله ۱: $I_n = 100 + n(50 - 60) = 100 - 10n$.
مرحله ۲: $I_{12} = 100 - 120 = -20$ (کمبود!).
نتیجه: موجودی منفی در ماه ۱۲ — هشدار مدیریتی.

مثال حل‌شده

مثال ۲۰: ارزش فعلی اقساط
صورت مسئله: دریافت ۳۰ میلیون در پایان هر سال برای ۵ سال، نرخ ۸٪. ارزش فعلی.
مرحله ۱: $PV = \sum_{n=1}^{5} \frac{30}{(1.08)^n} = 30 \cdot \frac{1-(1.08)^{-5}}{0.08}$.
مرحله ۲: $(1.08)^5 \approx 1.4693$.
مرحله ۳: $PV = 30 \cdot \frac{1-0.6806}{0.08} = 30 \times 3.9927 \approx 119.78$.
نتیجه: ۸.۱۱۹ میلیون.

۶.۱۷ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه ۱: اشتباه بین دنباله حسابی و هندسی.
راه پیشگیری: حسابی = جمع ثابت، هندسی = ضرب ثابت.
اشتباه ۲: فراموش کردن $n-1$ در فرمول جمله عمومی.
راه پیشگیری: $a_n = a_1 + (n-1)d$، نه $a_1 + nd$.
اشتباه ۳: اشتباه در فرمول جمع هندسی.
راه پیشگیری: $S_n = a_1(1-r^n)/(1-r)$.
اشتباه ۴: فرض همگرایی دنباله هندسی بدون بررسی $|r|$.
راه پیشگیری: $|r|<1$: همگرا؛ $|r|\geq 1$: واگرا.
اشتباه ۵: اشتباه در محاسبه میانگین رشد (استفاده از میانگین حسابی به‌جای هندسی).
راه پیشگیری: برای نرخ‌های رشد، از میانگین هندسی استفاده کن.
اشتباه ۶: فراموش کردن تبدیل درصد به اعشار.
راه پیشگیری: ۱۵٪ = ۰.۱۵.
اشتباه ۷: اشتباه در محاسبه قسط وام.
راه پیشگیری: فرمول $A = \frac{P \cdot r}{1-(1+r)^{-n}}$ را حفظ کن.
اشتباه ۸: اشتباه در تعداد دوره‌ها (سالانه vs. ماهانه).
راه پیشگیری: نرخ ماهانه = نرخ سالانه / ۱۲؛ تعداد دوره = سال × ۱۲.

۷.۱۷ کاربرد در مدیریت

کاربرد مدیریتی

کاربرد ۱: برنامه‌ریزی حقوق
حقوق با افزایش پله‌ای (حسابی) یا درصدی (هندسی) مدل‌سازی می‌شود.
کاربرد ۲: بهره مرکب و سرمایه‌گذاری
رشد سرمایه با دنباله هندسی مدل می‌شود.
کاربرد ۳: اقساط وام
محاسبه قسط ماهانه با فرمول ارزش فعلی دنباله هندسی.
کاربرد ۴: استهلاک دارایی
روش خط مستقیم (حسابی) و نزولی (هندسی).
کاربرد ۵: پیش‌بینی فروش
با نرخ رشد سالانه، فروش آینده با دنباله هندسی پیش‌بینی می‌شود.
کاربرد ۶: موجودی انبار
موجودی در پایان هر دوره با دنباله بازگشتی مدل می‌شود.
کاربرد ۷: تحلیل سرمایه‌گذاری
ارزش فعلی جریان‌های نقدی آتی با جمع هندسی محاسبه می‌شود.
کاربرد ۸: ارزیابی پروژه
نرخ بازده داخلی (IRR) با حل معادله دنباله هندسی به دست می‌آید.
کاربرد ۹: مدل‌سازی جمعیت
رشد جمعیت شهرها با دنباله هندسی.
کاربرد ۱۰: تحلیل بازار سهام
میانگین متحرک و نرخ رشد مرکب سالانه (CAGR) با دنباله‌ها.

۸.۱۷ خلاصه فصل

مفهوم	فرمول	کاربرد
دنباله حسابی	$a_n = a_1 + (n-1)d$	حقوق پله‌ای
جمع حسابی	$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	جمع حقوق
دنباله هندسی	$a_n = a_1 r^{n-1}$	بهره مرکب
جمع هندسی	$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$	ارزش فعلی
جمع بی‌نهایت	$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$، $\lvert r\rvert < 1$	پروژه دائمی
همگرایی	$\lim a_n = L$	رفتار بلندمدت
میانگین هندسی	$G = \sqrt[n]{\prod a_i}$	نرخ رشد متوسط
فیبوناچی	$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$	مدل‌های خاص

۹.۱۷ خودآزمایی

۱.۹.۱۷ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. جمله دهم دنباله $a_n = 2 + 3(n-1)$:

آ) ۲۶

ب) ۲۹

ج) ۳۲

د) ۳۵

۲. جمع ۱۰ جمله اول $a_n = 5 + 2(n-1)$:

آ) ۱۴۰

ب) ۱۵۰

ج) ۱۶۰

د) ۱۷۰

۳. جمله هفتم دنباله $a_1 = 3$، $r = 2$:

آ) ۹۶

ب) ۱۹۲

ج) ۳۸۴

د) ۷۶۸

۴. جمع ۵ جمله اول $a_1 = 2$، $r = 3$:

آ) ۱۲۱

ب) ۲۴۲

ج) ۳۶۳

د) ۴۸۴

۵. S_∞ برای $a_1 = 10$، $r = 0.5$:

آ) ۱۰

ب) ۱۵

ج) ۲۰

د) ۲۵

۶. $\lim_{n\to\infty}(0.5)^n$:

آ) ۰

ب) ۵.۰

ج) ۱

د) ∞

۷. $\lim_{n\to\infty}(1.5)^n$:

آ) ۰

ب) ۱

ج) ۵.۱

د) ∞

۸. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-1}$:

آ) ۰

ب) $2/3$

ج) $3/2$

د) ∞

۹. ۱۰۰ میلیون با ٪۱۰ سالانه بعد از ۳ سال:

آ) ۱۲۱

ب) ۱۳۰

ج) ۱.۱۳۳

د) ۱۴۰

۱۰. حقوق سال اول ۵۰، رشد ٪۱۰. حقوق سال ۵:

آ) ۶۵

ب) ۷۰

ج) ۲.۷۳

د) ۸۰

۱۱. جمله دهم فیبوناچی:

آ) ۳۴

ب) ۵۵

ج) ۸۹

د) ۱۴۴

۱۲. میانگین هندسی ۴ و ۹:

آ) ۶

ب) ۵.۶

ج) ۷

د) ۱۳

۱۳. اگر فروش ۳ سال: ۱۰۰، ۱۲۱، ۱۴۴. نرخ رشد متوسط:

آ) ٪۱۰

ب) ٪۱۵

ج) ٪۲۰

د) ٪۲۵

۱۴. کدام دنباله همگرا است؟

آ) $a_n = 2n$

ب) $a_n = (-1)^n$

ج) $a_n = 1/n$

د) $a_n = n^2$

۱۵. ارزش فعلی ۱۰۰ میلیون در ۲ سال، نرخ ٪۱۰:

آ) ۸۰

ب) ۶۴.۸۲

ج) ۹۰

د) ۹۵

۲.۹.۱۷ تشریحی (۸ سوال)

۱۶. $a_1=7$، $d=4$. a_{15} و S_{15}.
۱۷. $a_1=5$، $r=2$. a_{10} و S_{10}.
۱۸. $\sum_{n=1}^{\infty} 12\cdot(2/3)^n$.
۱۹. ۵۰۰ میلیون با ٪۸ سالانه. بعد از ۱۰ سال.
۲۰. حقوق سال اول ۸۰ میلیون، رشد ٪۶. جمع ۱۰ سال.
۲۱. $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n}{2n^2-1}$.
۲۲. وام ۳۰۰ میلیون، نرخ ماهانه ٪۱، ۱۲۰ قسط. قسط ماهانه.
۲۳. فروش ۵ سال: ۲۰۰، ۲۴۰، ۲۸۸، ۶.۳۴۵، ۷۲.۴۱۴. نرخ رشد متوسط سالانه.

۱۰.۱۷ پاسخنامه تشریحی

۱. ب) $2+3\times 9=29$.
۲. الف) $a_1=5$، $a_{10}=23$. $S=5\times 28=140$.
۳. ب) $3\cdot 2^6=192$.
۴. ب) $2\cdot\frac{1-3^5}{1-3}=2\cdot 121=242$.
۵. ج) $10/(1-0.5)=20$.
۶. الف) $|0.5|<1$، حد ۰.
۷. د) $|1.5|>1$، حد ∞.
۸. ب) نسبت ضرایب: $2/3$.
۹. ج) $100\cdot(1.1)^3=133.1$.
۱۰. ج) $50\cdot(1.1)^4\approx 73.2$.
۱۱. ب) ۵۵.
۱۲. الف) $\sqrt{36}=6$.
۱۳. ج) $\sqrt{144/100}=\sqrt{1.44}=1.2$ ٪۲۰.
۱۴. ج) $1/n\to 0$.
۱۵. ب) $100/(1.1)^2\approx 82.64$.
۱۶. $a_{15}=7+14\times 4=63$. $S_{15}=\frac{15}{2}(7+63)=525$.
۱۷. $a_{10}=5\cdot 2^9=2560$. $S_{10}=5\cdot\frac{1-2^{10}}{1-2}=5\times 1023=5115$.
۱۸. $a_1=12\cdot(2/3)=8$، $r=2/3$. $S_\infty=8/(1/3)=24$.
۱۹. $500\cdot(1.08)^{10}\approx 500\times 2.1589\approx 1079.5$.
۲۰. $S=80\cdot\frac{1-(1.06)^{10}}{1-1.06}\approx 80\times 13.1808\approx 1054.5$.
۲۱. نسبت ضرایب: $5/2=2.5$.
۲۲. $A=\frac{300\cdot 0.01}{1-(1.01)^{-120}}$. $(1.01)^{120}\approx 3.3004$. $A=3/(1-0.3030)=3/0.6970\approx 4.304$ میلیون.
۲۳. $(414.72/200)^{1/4}=(2.0736)^{0.25}=1.2$. نرخ متوسط ٪۲۰.

۱۱.۱۷ منابع پیشنهادی

- پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. فصل ۱۳.
- رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. فصل ۱۳.
- نیکوکار، م. (۱۳۹۷). *ریاضیات عمومی*. فصل ۱۳.
- T. S. Tan، (۲۰۱۹). *Applied Mathematics for Managerial، Social and Life Sciences*. Ch. ۱۲.
- A. S. Salzman، (۲۰۱۷). *Mathematics for Business*. Ch. ۱۱.

- E. Ummer، (۲۰۱۸). *Basic Mathematics for Finance and Business Economics*. Ch. ۱۱.

ایست بازرسی

پایان فصل ۱۳ — نسخه توسعه‌یافته
آمار: ~۲۴ صفحه A۴ | ۲۰ مثال حل‌شده | ۲۳ سوال | ۶ منبع

xcolor enumitem booktabs geometry amsmath،amssymb،amsthm [۱۲pt،a۴paper]article
xepersian hyperref tcolorbox
margin=۲.۵cm
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)
فصل ۱۴ : مشتق و مفاهیم آن (نسخه توسعه‌یافته) تیم ۵ نفره معمار آموزشی ۱۳ مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۱۸ فصل ۱۴: مشتق و مفاهیم آن (نسخه توسعه‌یافته — حجم دوبرابر)

۱.۱۸ چکیده

مشتق، قلب تپنده حساب دیفرانسیل و ابزار اصلی تحلیل نرخ تغییر در مدیریت است. مشتق به ما می‌گوید «اگر ورودی را کمی تغییر دهیم، خروجی چقدر و با چه سرعتی تغییر می‌کند؟». در مدیریت، مشتق ابزار اصلی تحلیل نهایی، بهینه‌سازی، پیش‌بینی، و تصمیم‌گیری است: هزینه نهایی، درآمد نهایی، سود نهایی، بهره‌وری نهایی، کشش تقاضا. در این فصل، مفهوم شهودی مشتق، تعریف دقیق با حد، تفسیر هندسی (شیب خط مماس)، تفسیر فیزیکی (سرعت)، مشتق‌پذیری و پیوستگی، مشتق چپ و راست، نقاط غیرمشتق‌پذیر، مشتق مرتبه بالاتر، و کاربردهای گسترده مدیریتی را می‌آموزی. هدف نهایی: بتوانی مشتق هر تابعی را از تعریف حساب کنی و مفاهیم مدیریتی را با آن تحلیل کنی.

۲.۱۸ اهداف یادگیری

- **تعریف کند:** مشتق، آهنگ تغییر لحظه‌ای، خط مماس، مشتق چپ و راست، مشتق‌پذیری، مشتق مرتبه بالاتر.
- **محاسبه کند:** مشتق با تعریف حد، مشتق توابع ساده، مشتق چپ و راست.
- **تحلیل کند:** رابطه پیوستگی و مشتق‌پذیری، نقاط غیرمشتق‌پذیر، تفسیر هندسی.
- **تفسیر کند:** مشتق به‌عنوان نرخ تغییر، هزینه نهایی، درآمد نهایی، سود نهایی.
- **مدل‌سازی کند:** سرعت رشد، شتاب، بهره‌وری نهایی، تحلیل نهایی در اقتصاد.
- **ارزیابی کند:** مشتق‌پذیری تابع در نقاط بحرانی.

۳.۱۸ مقدمه طنز

تصور کن یک مدیر کارخانه می‌خواهد بداند «اگر تولید را یک واحد اضافه کنم، هزینه چقدر زیاد می‌شود؟» پاسخ این سوال، «هزینه نهایی» است — که دقیقاً همان مشتق تابع هزینه است. اگر تابع هزینه $C(q) = 2q^2 + 100q + 500$ باشد، هزینه نهایی:

$$C'(q) = 4q + 100$$

یعنی در تولید ۱۰ واحد، هزینه نهایی $4(10) + 100 = 140$ است: هر واحد اضافه، ۱۴۰ واحد هزینه اضافه می‌کند. این عدد، ابزار تصمیم‌گیری مدیر است: اگر قیمت فروش ۱۵۰ باشد، تولید صرفه دارد؛ اگر ۱۳۰ باشد، ضرر می‌دهد.

مشتق مثل «سرعت‌سنج» است: به جای اینکه بگویی «ماشین ۱۰۰ کیلومتر رفته»، می‌گویی «ماشین در این لحظه با سرعت ۸۰ کیلومتر در ساعت حرکت می‌کند». این تفاوت بین «میانگین» و «لحظه‌ای» است — و در مدیریت، تصمیم‌ها اغلب بر اساس نرخ لحظه‌ای گرفته می‌شوند، نه میانگین.

نکته طنزآمیز ماجرا اینجاست: بسیاری از افراد فکر می‌کنند «مشتق یک فرمول پیچیده است که فقط ریاضیدانان می‌فهمند» و از آن فرار می‌کنند. اما در دنیای واقعی، مشتق همان «نرخ تغییر» است که مدیران هر روز با آن سر و کار دارند: نرخ تغییر فروش، نرخ تغییر هزینه، نرخ تغییر سود. اگر مدیر بلد نباشد مشتق بگیرد، مثل راننده‌ای است که کورکورانه رانندگی می‌کند. این فصل، تو را از «تفکر میانگین» به «تفکر لحظه‌ای» می‌برد.

۴.۱۸ مفاهیم اصلی

۱.۴.۱۸ مفهوم ۱: مفهوم شهودی مشتق

تعریف شهودی: مشتق تابع f در نقطه x، «نرخ تغییر لحظه‌ای» f نسبت به x است.

نمادها:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \dot{f} = Df(x)$$

شهود: مشتق مثل «سرعت‌سنج» است. اگر $f(t)$ = مسافت پیموده‌شده و t = زمان، مشتق $f'(t)$ = سرعت لحظه‌ای.

تفاوت با میانگین:

- **نرخ تغییر میانگین:** $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
- **نرخ تغییر لحظه‌ای:** $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

مثال مدیریتی: اگر فروش از ۱۰۰ به ۱۵۰ میلیون برود (میانگین ۵۰ میلیون)، ممکن است نرخ لحظه‌ای در ابتدا ۳۰ و در انتها ۷۰ باشد. مدیر برای تصمیم‌گیری، به نرخ لحظه‌ای نیاز دارد.

۲.۴.۱۸ مفهوم ۲: تعریف دقیق مشتق با حد

قضیه

مشتق تابع f در نقطه $x = a$:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

یا به‌طور معادل:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

شهود: نسبت تغییر تابع به تغییر ورودی، وقتی تغییر ورودی به صفر میل کند.

مثال عددی: $f(x) = x^2$. مشتق در $x = 3$:

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} \tag{۱۵۸}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} \tag{۱۵۹}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(6 + h) = 6 \tag{۱۶۰}$$

۳.۴.۱۸ مفهوم ۳: تفسیر هندسی — شیب خط مماس

تعریف: مشتق $f'(a)$ برابر شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه $(a, f(a))$ است.

معادله خط مماس:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

معادله خط قائم:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) \quad (f'(a) \neq 0)$$

شهود: خط مماس، خطی است که «در نقطه لمس، هم‌جهت با نمودار» است.

مثال: $f(x) = x^2$، نقطه $(2, 4)$. $f'(2) = 4$. معادله مماس:

$$y - 4 = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 4$$

مثال مدیریتی: شیب خط مماس بر تابع سود در یک نقطه، «نرخ تغییر لحظه‌ای سود» را نشان می‌دهد.

۴.۴.۱۸ مفهوم ۴: تفسیر فیزیکی — سرعت و شتاب

مثال: اگر $s(t) = 5t^2 + 3t$ مکان یک جسم در زمان t باشد:

$$v(t) = s'(t) = 10t + 3 \quad \text{(سرعت)} \tag{۱۶۱}$$
$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 10 \quad \text{(شتاب)} \tag{۱۶۲}$$

مثال مدیریتی: اگر $S(t) = 100t^{0.5}$ فروش در زمان t باشد، نرخ رشد فروش:

$$S'(t) = 50t^{-0.5} = \frac{50}{\sqrt{t}}$$

یعنی در ابتدا فروش سریع رشد می‌کند و سپس کند می‌شود.

۵.۴.۱۸ مفهوم ۵: نمادگذاری مشتق

نمادهای مشتق:

- **لاگرانژ:** $f'(x)$، $f''(x)$، $f^{(n)}(x)$.
- **لایبنیتز:** $\frac{df}{dx}$، $\frac{d^2f}{dx^2}$.
- **نیوتن:** $\dot{f}$، $\ddot{f}$.
- **اویلر:** Df، D^2f.

مقدار مشتق در یک نقطه:

$$f'(a) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$$

۶.۴.۱۸ مفهوم ۶: مشتق‌پذیری و پیوستگی

قضیه

قضیه: اگر f در a مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f در a پیوسته است. اما عکس آن درست نیست.

شهود: مشتق‌پذیری قوی‌تر از پیوستگی است. یک تابع مشتق‌پذیر، حتماً پیوسته است؛ اما یک تابع پیوسته، لزوماً مشتق‌پذیر نیست.
مثال: $f(x) = |x|$ در $x = 0$ پیوسته است اما مشتق‌پذیر نیست.
دلیل عدم مشتق‌پذیری: مشتق چپ:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|0+h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

مشتق راست:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|0+h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = +1$$

چون دو مشتق برابر نیستند، مشتق وجود ندارد.

۷.۴.۱۸ مفهوم ۷: مشتق چپ و راست

تعریف مشتق راست:

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

تعریف مشتق چپ:

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

شرط مشتق‌پذیری:

$$f'_+(a) = f'_-(a) \Rightarrow \text{وجود دارد} f'(a)$$

مثال: $f(x)=|x|$ در $x=0$: $f'_+=1$، $f'_-=-1$ ⟵ مشتق وجود ندارد.
مثال مدیریتی: تابع پاداش با پرش:

$$S(x)=\begin{cases}5 & x<100\\ 6 & x\geq 100\end{cases}$$

در $x=100$، مشتق چپ ۰ و مشتق راست ۰ است (چون در هر بازه تابع ثابت است)، اما خود تابع ناپیوسته است ⟵ پس مشتق‌پذیر نیست.

۸.۴.۱۸ مفهوم ۸: نقاط غیرمشتق‌پذیر

حالات عدم مشتق‌پذیری:

۱. **گوشه (Corner):** مثل $|x|$ در $x=0$.

۲. **نقطه بازگشت (Cusp):** مثل $\sqrt[3]{x^2}$ در $x=0$.

۳. **مشتق نامتناهی (Vertical Tangent):** مثل $\sqrt[3]{x}$ در $x=0$.

۴. **ناپیوستگی:** هر تابع ناپیوسته در نقطه ناپیوستگی، مشتق‌پذیر نیست.

مثال مدیریتی: تابع تعرفه پله‌ای در نقاط مرزی مشتق‌پذیر نیست (چون مشتق چپ و راست متفاوت است).

۹.۴.۱۸ مفهوم ۹: مشتق مرتبه بالاتر

تعریف: مشتق دوم = مشتق مشتق اول:

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{d^2f}{dx^2}$$

مثال: $f(x)=x^3-3x^2+2x$.

$$f'(x)=3x^2-6x+2 \tag{۱۶۳}$$
$$f''(x)=6x-6 \tag{۱۶۴}$$
$$f'''(x)=6 \tag{۱۶۵}$$
$$f^{(4)}(x)=0 \tag{۱۶۶}$$

تفسیر مدیریتی مشتق دوم:

- **مشتق اول سود:** نرخ تغییر سود.
- **مشتق دوم سود:** شتاب تغییر سود (آیا نرخ رشد خودش زیاد یا کم می‌شود؟).

۱۰.۴.۱۸ مفهوم ۱۰: قوانین مشتق‌گیری پایه

مشتق توابع پایه:

تابع	مشتق
c (ثابت)	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

قوانین کلی:

$$(cf)' = cf' \tag{۱۶۷}$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \tag{۱۶۸}$$

$$(fg)' = f'g + fg' \quad \text{(ضرب)} \tag{۱۶۹}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{(تقسیم)} \tag{۱۷۰}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{(زنجیره‌ای)} \tag{۱۷۱}$$

۱۱.۴.۱۸ مفهوم ۱۱: مشتق توابع مرکب

قانون زنجیره‌ای:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال: $y = (3x^2+1)^5$. با $u = 3x^2 + 1$:

$$y' = 5u^4 \cdot 6x = 30x(3x^2+1)^4$$

مثال مدیریتی: اگر تابع هزینه $C(q)$ و $q(L)$ تعداد کارگر باشد، هزینه برحسب کارگر:

$$\frac{dC}{dL} = \frac{dC}{dq} \cdot \frac{dq}{dL}$$

۱۲.۴.۱۸ مفهوم ۱۲: مشتق توابع نمایی و لگاریتمی

مشتق‌های مهم:

$$\frac{d}{dx} e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x) \tag{۱۷۲}$$

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \tag{۱۷۳}$$

$$\frac{d}{dx} a^{f(x)} = a^{f(x)} \ln a \cdot f'(x) \tag{۱۷۴}$$

مثال: $\frac{d}{dx}e^{3x^2} = e^{3x^2} \cdot 6x = 6xe^{3x^2}$.
مثال مدیریتی: $\frac{d}{dt}Pe^{rt} = rPe^{rt}$ ← نرخ رشد سرمایه.

۱۳.۴.۱۸ مفهوم ۱۳: مشتق و تحلیل نهایی در مدیریت

مفاهیم تحلیل نهایی (Marginal Analysis):

مفهوم مدیریتی	تعریف ریاضی
هزینه نهایی	$MC = C'(q)$
درآمد نهایی	$MR = R'(q)$
سود نهایی	$MP = P'(q) = R'(q) - C'(q)$
بهره‌وری نهایی	$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L}$
مطلوبیت نهایی	$MU = U'(x)$
تمایل نهایی به مصرف	$MPC = \frac{dC}{dY}$

اصل بهینه‌سازی: سود در نقطه‌ای ماکسیمم است که:

$$MR = MC \iff P'(q) = 0$$

۱۴.۴.۱۸ مفهوم ۱۴: مشتق و کشش

تعریف کشش قیمتی تقاضا:

$$E_d = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$$

تفسیر: درصد تغییر تقاضا نسبت به درصد تغییر قیمت.
مثال: اگر $Q = 100 - 2P$، در $P = 20$، $Q = 60$:

$$E_d = (-2) \cdot \frac{20}{60} = -\frac{2}{3}$$

۱۵.۴.۱۸ مفهوم ۱۵: مشتق و تقریب خطی

تقریب خطی: برای x نزدیک به a:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

مثال: تقریب $\sqrt{4.1}$:

$$\sqrt{4.1} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(0.1) = 2 + \frac{0.1}{4} = 2.025$$

۵.۱۸ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: مشتق با تعریف حد
صورت مسئله: $f(x) = x^2 + 2x$. مشتق در $x = 1$.
مرحله ۱: $f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2+2(1+h)-3}{h}$.
مرحله ۲: $= \lim_{h\to 0} \frac{1+2h+h^2+2+2h-3}{h}$.
مرحله ۳: $= \lim_{h\to 0} \frac{4h+h^2}{h} = 4$.
نتیجه: $f'(1) = 4$.

مثال حل‌شده

مثال ۲: مشتق چندجمله‌ای
صورت مسئله: $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 7$.
مرحله ۱: $f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 5$.
نتیجه: $f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 5$.

مثال حل‌شده

مثال ۳: مشتق ضرب
صورت مسئله: $f(x) = (x^2 + 1)(2x - 3)$.
مرحله ۱: $f' = (2x)(2x - 3) + (x^2 + 1)(2)$.
مرحله ۲: $= 4x^2 - 6x + 2x^2 + 2 = 6x^2 - 6x + 2$.
نتیجه: $f'(x) = 6x^2 - 6x + 2$.

مثال حل‌شده

مثال ۴: مشتق تقسیم
صورت مسئله: $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.
مرحله ۱: $f' = \frac{(1)(x-1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2}$.
مرحله ۲: $= \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$.
نتیجه: $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

مثال حل‌شده

مثال ۵: مشتق زنجیره‌ای
صورت مسئله: $f(x) = (3x^2 + 2)^4$.
مرحله ۱: $f' = 4(3x^2 + 2)^3 \cdot 6x$.
مرحله ۲: $= 24x(3x^2 + 2)^3$.
نتیجه: $f'(x) = 24x(3x^2 + 2)^3$.

مثال حل‌شده

مثال ۶: مشتق نمایی
صورت مسئله: $f(x) = e^{2x^2+1}$.
مرحله ۱: $f' = e^{2x^2+1} \cdot 4x$.
نتیجه: $f'(x) = 4xe^{2x^2+1}$.

مثال حل‌شده

مثال ۷: مشتق لگاریتمی
صورت مسئله: $f(x) = \ln(3x^2 + 1)$.
مرحله ۱: $f' = \frac{6x}{3x^2+1}$.
نتیجه: $f'(x) = \frac{6x}{3x^2+1}$.

مثال حل‌شده

مثال ۸: مشتق دوم
صورت مسئله: $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$. مشتق دوم.
مرحله ۱: $f'(x) = 4x^3 - 4x$.
مرحله ۲: $f''(x) = 12x^2 - 4$.
نتیجه: $f''(x) = 12x^2 - 4$.

مثال حل‌شده

مثال ۹: خط مماس
صورت مسئله: خط مماس بر $f(x) = x^3$ در $x = 2$.
مرحله ۱: $f(2) = 8$.
مرحله ۲: $f'(x) = 3x^2$، $f'(2) = 12$.
مرحله ۳: $y - 8 = 12(x - 2) \Rightarrow y = 12x - 16$.
نتیجه: $y = 12x - 16$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۰: هزینه نهایی
صورت مسئله: $C(q) = q^3 - 6q^2 + 15q + 100$. هزینه نهایی در $q = 5$.
مرحله ۱: $C'(q) = 3q^2 - 12q + 15$.
مرحله ۲: $C'(5) = 75 - 60 + 15 = 30$.
نتیجه: هزینه نهایی ۳۰.

مثال حل‌شده

مثال ۱۱: درآمد نهایی
صورت مسئله: تابع تقاضا $P = 100 - 2Q$. تابع درآمد و درآمد نهایی.
مرحله ۱: $R = PQ = 100Q - 2Q^2$.
مرحله ۲: $MR = R' = 100 - 4Q$.
نتیجه: $MR = 100 - 4Q$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۲: بهینه‌سازی سود
صورت مسئله: $R(q) = 100q - q^2$، $C(q) = 20q + 100$. حداکثر سود.
مرحله ۱: $P(q) = -q^2 + 80q - 100$.
مرحله ۲: $P'(q) = -2q + 80 = 0 \Rightarrow q = 40$.
مرحله ۳: $P(40) = -1600 + 3200 - 100 = 1500$.
نتیجه: حداکثر سود ۱۵۰۰ در $q = 40$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۳: مشتق چپ و راست

صورت مسئله: $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$. مشتق در $x = 1$.

مرحله ۱: مشتق چپ: $2x \to 2$.

مرحله ۲: مشتق راست: 2.

مرحله ۳: دو مشتق برابرند.

نتیجه: $f'(1) = 2$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۴: عدم مشتق‌پذیری

صورت مسئله: $f(x) = |x - 2|$. مشتق در $x = 2$.

مرحله ۱: مشتق چپ: -1.

مرحله ۲: مشتق راست: $+1$.

نتیجه: مشتق وجود ندارد.

مثال حل‌شده

مثال ۱۵: کشش تقاضا

صورت مسئله: $Q = 500 - 5P$. کشش در $P = 50$، $Q = 250$.

مرحله ۱: $dQ/dP = -5$.

مرحله ۲: $E = -5 \cdot \frac{50}{250} = -1$.

نتیجه: کشش واحد (واحد الاستیک).

مثال حل‌شده

مثال ۱۶: تقریب خطی

صورت مسئله: تقریب $\sqrt[3]{8.1}$.

مرحله ۱: $f(x) = x^{1/3}$، $a = 8$، $f(8) = 2$.

مرحله ۲: $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$، $f'(8) = \frac{1}{12}$.

مرحله ۳: $f(8.1) \approx 2 + \frac{0.1}{12} \approx 2.0083$.

نتیجه: تقریب ۲.۰۰۸۳.

مثال حل‌شده

مثال ۱۷: مشتق مرتبه سوم

صورت مسئله: $f(x) = 2x^5 - 3x^2$. مشتق سوم.

مرحله ۱: $f' = 10x^4 - 6x$.

مرحله ۲: $f'' = 40x^3 - 6$.

مرحله ۳: $f''' = 120x^2$.

نتیجه: $f'''(x) = 120x^2$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۸: بهره‌وری نهایی
صورت مسئله: $Q(L) = 20L - 0.5L^2$. بهره‌وری نهایی در $L = 10$.
مرحله ۱: $Q'(L) = 20 - L$.
مرحله ۲: $Q'(10) = 10$.
نتیجه: بهره‌وری نهایی ۱۰ واحد.

مثال حل‌شده

مثال ۱۹: مطلوبیت نهایی
صورت مسئله: $U(x) = 100 \ln x$. مطلوبیت نهایی در $x = 10$.
مرحله ۱: $U'(x) = 100/x$.
مرحله ۲: $U'(10) = 10$.
نتیجه: مطلوبیت نهایی ۱۰.

مثال حل‌شده

مثال ۲۰: شتاب تغییر سود
صورت مسئله: $P(q) = -2q^3 + 30q^2 - 100q$. شتاب سود در $q = 5$.
مرحله ۱: $P' = -6q^2 + 60q - 100$.
مرحله ۲: $P'' = -12q + 60$.
مرحله ۳: $P''(5) = -60 + 60 = 0$.
نتیجه: شتاب سود در $q = 5$ برابر صفر (نقطه عطف).

۶.۱۸ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه ۱: اشتباه بین مشتق و مقدار تابع.
راه پیشگیری: مشتق، نرخ تغییر است نه خود مقدار.
اشتباه ۲: فرض مشتق‌پذیری از پیوستگی.
راه پیشگیری: پیوستگی شرط لازم است، نه کافی.
اشتباه ۳: اشتباه در قانون ضرب و تقسیم.
راه پیشگیری: $(fg)' \neq f'g'$.
اشتباه ۴: فراموش کردن قانون زنجیره‌ای.
راه پیشگیری: برای توابع مرکب، همیشه از زنجیره‌ای استفاده کن.
اشتباه ۵: اشتباه در مشتق $\ln x$ (فرض $1/x$ به‌جای $\ln x$).
راه پیشگیری: $(\ln x)' = 1/x$.
اشتباه ۶: فراموش کردن مشتق چپ و راست در توابع قطعه‌ای.
راه پیشگیری: در نقاط مرزی، هر دو مشتق را جدا حساب کن.
اشتباه ۷: اشتباه در تفسیر مشتق دوم.
راه پیشگیری: مشتق دوم = شتاب تغییر، نه خود نرخ تغییر.

۷.۱۸ کاربرد در مدیریت

کاربرد مدیریتی

کاربرد ۱: هزینه نهایی
$MC = C'(q)$ — تصمیم‌گیری برای تولید اضافه.
کاربرد ۲: درآمد نهایی
$MR = R'(q)$ — تحلیل قیمت‌گذاری بهینه.
کاربرد ۳: سود نهایی
$MP = MR - MC$ — نقطه بهینه تولید.
کاربرد ۴: بهره‌وری نهایی
$MP_L = \partial Q/\partial L$ — استخدام بهینه کارگر.
کاربرد ۵: مطلوبیت نهایی
$MU = U'(x)$ — تخصیص بودجه مصرف.
کاربرد ۶: کشش تقاضا
$E_d = (dQ/dP)(P/Q)$ — تحلیل حساسیت قیمت.
کاربرد ۷: نرخ رشد
$S'(t)/S(t)$ — نرخ رشد نسبی.
کاربرد ۸: تقریب خطی
$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$ — پیش‌بینی سریع.
کاربرد ۹: تحلیل حساسیت
تغییر خروجی نسبت به تغییر ورودی.
کاربرد ۱۰: تصمیم‌گیری در حاشیه
تصمیم‌های «کمی بیشتر یا کمی کمتر» با مشتق.

۸.۱۸ خلاصه فصل

مفهوم	فرمول	کاربرد
تعریف مشتق	$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$	نرخ لحظه‌ای
مشتق توان	$(x^n)' = nx^{n-1}$	چندجمله‌ای
مشتق ضرب	$(fg)' = f'g + fg'$	ترکیب توابع
مشتق تقسیم	$(f/g)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$	نسبت‌ها
زنجیره‌ای	$(f\circ g)' = f'(g)\cdot g'$	توابع مرکب
نمایی	$(e^x)' = e^x$	رشد
لگاریتمی	$(\ln x)' = 1/x$	مطلوبیت
هزینه نهایی	$MC = C'(q)$	تصمیم تولید
درآمد نهایی	$MR = R'(q)$	قیمت‌گذاری
بهینه	$MR = MC$	حداکثر سود

۹.۱۸ خودآزمایی

۱.۹.۱۸ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. مشتق $f(x) = x^3$:

آ) $3x$

ب) $3x^2$

ج) x^2

د) $x^4/4$

۲. مشتق $f(x) = 5$:

آ) ۵

ب) ۱

ج) ۰

د) $5x$

۳. مشتق $f(x) = e^{2x}$:

آ) e^{2x}

ب) $2e^{2x}$

ج) $2xe^{2x}$

د) $e^{2x}/2$

۴. مشتق $f(x) = \ln(3x)$:

آ) $1/(3x)$

ب) $3/x$

ج) $1/x$

د) $3\ln x$

۵. مشتق $f(x) = (x^2+1)^3$:

آ) $3(x^2+1)^2$

ب) $6x(x^2+1)^2$

ج) $6x(x^2+1)^3$

د) $3x^2$

۶. مشتق $f(x) = x\ln x$:

آ) $1/x$

ب) $\ln x + 1$

ج) $\ln x$

د) $x/\ln x$

۷. مشتق $f(x) = \frac{1}{x}$:

آ) $1/x^2$

ب) $-1/x^2$

ج) $\ln x$

د) $-1/x$

۸. مشتق دوم $f(x) = x^4$:

آ) $4x^3$

ب) $12x^2$

ج) $24x$

د) 24

۹. اگر $C(q) = q^2 + 10q$، هزینه نهایی در $q = 5$:

آ) ۱۰

ب) ۲۰

ج) ۳۰

د) ۴۰

۱۰. مشتق $f(x) = \sin(2x)$:

آ) $\cos(2x)$

ب) $2\cos(2x)$

ج) $-2\cos(2x)$

د) $2\sin(2x)$

۱۱. مشتق $f(x) = \sqrt{x}$:

آ) $1/(2\sqrt{x})$

ب) $2\sqrt{x}$

ج) $\sqrt{x}/2$

د) $1/\sqrt{x}$

۱۲. اگر $P(q) = -q^2 + 20q$، سود نهایی در $q = 5$:

آ) ۵

ب) ۱۰

ج) ۱۵

د) ۲۰

۱۳. خط مماس بر $f(x) = x^2$ در $x = 3$:

آ) $y = 6x - 9$

ب) $y = 3x - 9$

ج) $y = 6x + 9$

د) $y = 9x$

۱۴. مشتق $f(x) = xe^x$:

آ) e^x

ب) xe^x

ج) $e^x(1 + x)$

د) $e^x(1 - x)$

۱۵. مشتق $f(x) = \ln(x^2 + 1)$:

آ) $\frac{2x}{x^2+1}$

ب) $\frac{1}{x^2+1}$

ج) $\frac{2}{x}$

د) $2x \ln(x^2 + 1)$

۲.۹.۱۸ تشریحی (۸ سوال)

۱۶. مشتق $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$ را بیاب.

۱۷. مشتق $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ را بیاب.

۱۸. مشتق $f(x) = e^{x^2} \cdot \ln x$ را بیاب.

۱۹. خط مماس بر $f(x) = x^3 - x$ در $x = 2$.

۲۰. اگر $C(q) = 0.01q^3 - 0.5q^2 + 10q + 1000$، هزینه نهایی در $q = 20$.

۲۱. مشتق دوم $f(x) = x^4 - 6x^2 + 3x$.

۲۲. اگر $Q = 200 - 4P$، کشش تقاضا در $P = 25$.

۲۳. مشتق $f(x) = (2x + 1)^5 \cdot e^{3x}$.

۱۰.۱۸ پاسخنامه تشریحی

۱. ب) $(x^3)' = 3x^2$.

۲. ج) مشتق ثابت صفر است.

۳. ب) $(e^{2x})' = 2e^{2x}$.

۴. ج) $(\ln 3x)' = \frac{3}{3x} = 1/x$.

۵. ب) $3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2 + 1)^2$.

۶. ب) $(x \ln x)' = \ln x + x \cdot 1/x = \ln x + 1$.

۷. ب) $(x^{-1})' = -x^{-2} = -1/x^2$.

۸. ب) $f' = 4x^3$، $f'' = 12x^2$.

۹. **ب)** $C'(q) = 2q + 10$، $C'(5) = 20$.
۱۰. **ب)** $2\cos(2x)$.
۱۱. **الف)** $1/(2\sqrt{x})$.
۱۲. **ب)** $P'(q) = -2q + 20$، $P'(5) = 10$.
۱۳. **الف)** $f(3) = 9$، $f'(3) = 6$، $y = 9 + 6(x-3) = 6x - 9$.
۱۴. **ج)** $(xe^x)' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$.
۱۵. **الف)** $\frac{2x}{x^2+1}$.
۱۶. $f'(x) = 6x^2 - 10x + 4$.
۱۷. $f' = \frac{(2x)(x-1)-(x^2+1)(1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$.
۱۸. $f' = 2xe^{x^2}\ln x + e^{x^2}/x = e^{x^2}(2x\ln x + 1/x)$.
۱۹. $f(2) = 6$، $f'(x) = 3x^2 - 1$، $f'(2) = 11$. مماس: $y = 6 + 11(x-2) = 11x - 16$.
۲۰. $C'(q) = 0.03q^2 - q + 10$. $C'(20) = 12 - 20 + 10 = 2$.
۲۱. $f' = 4x^3 - 12x + 3$، $f'' = 12x^2 - 12$.
۲۲. $dQ/dP = -4$. در $P = 25$، $Q = 100$. $E = -4 \cdot 25/100 = -1$.
۲۳. $f' = 10(2x+1)^4 e^{3x} + 3(2x+1)^5 e^{3x} = e^{3x}(2x+1)^4[10 + 3(2x+1)] = e^{3x}(2x+1)^4(6x+13)$.

۱۱.۱۸ منابع پیشنهادی

- پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. فصل ۱۴.
- رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. فصل ۱۴.
- نیکوکار، م. (۱۳۹۷). *ریاضیات عمومی*. فصل ۱۴.
- T. S. Tan، (۲۰۱۹). *Applied Mathematics for the Managerial، Social and Life Sciences*. Ch. ۱۱–۱۲.
- A. S. Salzman، (۲۰۱۷). *Mathematics for Business*. Ch. ۱۰–۱۱.
- E. Ummer، (۲۰۱۸). *Basic Mathematics for Economics، Finance and Business*. Ch. ۱۲.

ایست بازرسی

پایان فصل ۱۴ — نسخه توسعه‌یافته
آمار: ∼۲۴ صفحه A۴ | ۲۰ مثال حل‌شده | ۲۳ سوال | ۶ منبع

xcolor enumitem booktabs geometry amsmath،amssymb،amsthm [۱۲pt،a۴paper]article
xepersian hyperref tcolorbox
margin=۲.۵cm
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)
فصل ۱۵ : قوانین مشتق‌گیری (نسخه توسعه‌یافته) تیم ۵ نفره معمار آموزشی ۱۳ مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۱۹ فصل ۱۵: قوانین مشتق‌گیری (نسخه توسعه‌یافته — حجم دوبرابر)

۱.۱۹ چکیده

در فصل قبل با مفهوم مشتق و تعریف آن با حد آشنا شدی. اما اگر بخواهی هر بار از تعریف حد استفاده کنی، محاسبات بسیار طولانی و خسته‌کننده می‌شوند. اینجاست که «قوانین مشتق‌گیری» وارد می‌شوند: مجموعه‌ای از فرمول‌های آماده که مشتق‌گیری را به یک فرآیند سریع و مکانیکی تبدیل می‌کنند. در این فصل، قوانین مشتق‌گیری توابع پایه (ثابت، توان، رادیکال)، قوانین جمع، تفاضل، ضرب، تقسیم، زنجیره‌ای، مشتق توابع نمایی، لگاریتمی، مثلثاتی، مشتق مرتبه بالاتر، مشتق ضمنی، و کاربردهای گسترده مدیریتی را می‌آموزی. هدف نهایی: بتوانی مشتق هر تابع پیچیده‌ای را با استفاده از قوانین، در چند ثانیه محاسبه کنی و برای تحلیل مسائل مدیریتی به کار ببری.

۲.۱۹ اهداف یادگیری

- **تعریف کند:** قانون توان، قانون ضرب، قانون تقسیم، قانون زنجیره‌ای، مشتق ضمنی.
- **محاسبه کند:** مشتق هر تابع جبری، نمایی، لگاریتمی، مثلثاتی و مرکب آن‌ها.
- **تحلیل کند:** ساختار توابع پیچیده و تجزیه آن‌ها به قوانین ساده.
- **به‌کار برد:** قانون زنجیره‌ای برای توابع چندلایه.
- **مدل‌سازی کند:** نرخ تغییر مرکب، بهره‌وری، کشش، و رشد در مسائل مدیریتی.
- **ارزیابی کند:** انتخاب کدام قانون برای کدام ساختار تابع.

۳.۱۹ مقدمه طنز

تصور کن یک تحلیلگر مالی می‌خواهد مشتق تابع سود یک شرکت را حساب کند. تابع سود به این شکل است:

$$P(q) = (3q^2 + 5q)(4q^3 - 2q)^5 \cdot \ln(q^2 + 1)$$

اگر بخواهد از تعریف حد استفاده کند، ممکن است چند ساعت وقت بگذارد و در انتها هم اشتباه کند. اما اگر «قوانین مشتق‌گیری» را بلد باشد — قانون ضرب، قانون زنجیره‌ای، و مشتق لگاریتمی — می‌تواند در چند دقیقه به جواب برسد.

قوانین مشتق‌گیری مثل «جعبه‌ابزار مکانیکی» هستند: هر ابزار برای یک نوع کار خاص ساخته شده. اگر بلد باشی کدام آچار را برای کدام پیچ استفاده کنی، تعمیر ماشین در چند دقیقه انجام می‌شود. اگر نه، ممکن است ساعتها وقت بگذاری و پیچ را هم خراب کنی.

نکته طنزآمیز ماجرا اینجاست: بسیاری از دانشجوها فکر می‌کنند «مشتق‌گیری یعنی حفظ کردن ۲۰ فرمول» و از این کار فرار می‌کنند. اما در دنیای واقعی، فقط ۵ قانون اصلی (توان، ضرب، تقسیم، زنجیره‌ای، نمایی/لگاریتمی) کافی است تا ۹۹٪ توابع مدیریتی را مشتق بگیری. این فصل، تو را از «حفظ کردن» به «فهمیدن» می‌برد — و از «ترس از مشتق» به «لذت مشتق‌گیری».

۴.۱۹ مفاهیم اصلی

۱.۴.۱۹ مفهوم ۱: قانون توان (Power Rule)

قضیه

اگر $f(x) = x^n$ که n یک عدد حقیقی است، آنگاه:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

شهود: توان را «پایین می‌آوری» و یک واحد کم می‌کنی.
مثال‌های ساده:

$$(x^3)' = 3x^2 \quad (۱۷۵)$$
$$(x^5)' = 5x^4 \quad (۱۷۶)$$
$$(x^{100})' = 100x^{99} \quad (۱۷۷)$$
$$(x)' = 1 \quad (۱۷۸)$$
$$(x^0)' = 0 \quad (۱۷۹)$$
$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (۱۸۰)$$
$$(\sqrt[3]{x})' = (x^{1/3})' = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad (۱۸۱)$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \quad (۱۸۲)$$
$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3} \quad (۱۸۳)$$

مثال مدیریتی: تابع تولید $Q(L) = 20L^{0.5}$:

$$Q'(L) = 10L^{-0.5} = \frac{10}{\sqrt{L}}$$

این «بهره‌وری نهایی کار» است. در $L = 100$، $Q'(100) = 1$ — یعنی هر کارگر اضافه، ۱ واحد تولید اضافه می‌کند.

۲.۴.۱۹ مفهوم ۲: قانون ضریب ثابت

قضیه

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

شهود: ضریب ثابت، «دست‌نخورده» می‌ماند و فقط روی تابع اعمال می‌شود.
مثال:

$$(5x^3)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2 \quad (۱۸۴)$$
$$(-2x^4)' = -2 \cdot 4x^3 = -8x^3 \quad (۱۸۵)$$
$$(100\sqrt{x})' = 100 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{50}{\sqrt{x}} \quad (۱۸۶)$$

مثال مدیریتی: اگر تابع درآمد $R(q) = 50q - 0.5q^2$:

$$R'(q) = 50 - q$$

در $q = 30$، درآمد نهایی $R'(30) = 20$.

۳.۴.۱۹ مفهوم ۳: قانون جمع و تفاضل

قضیه

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

شهود: مشتق جمع، جمع مشتق‌هاست.
مثال:

$$(3x^4 + 2x^2 - 5x + 7)' = 12x^3 + 4x - 5 \quad (۱۸۷)$$

$$(x^3 - \sqrt{x} + \ln x)' = 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \quad (۱۸۸)$$

مثال مدیریتی: تابع سود $P(q) = R(q) - C(q)$:

$$P'(q) = R'(q) - C'(q) = MR - MC$$

این همان «سود نهایی» است.

۴.۴.۱۹ مفهوم ۴: قانون ضرب (Product Rule)

قضیه

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

شهود: «مشتق اول × دومی + اولی × مشتق دوم».
اثبات: طبق تعریف حد:

$$(fg)' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \quad (۱۸۹)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \quad (۱۹۰)$$

$$= \lim_{h \to 0} g(x+h) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad (۱۹۱)$$

$$= g(x)f'(x) + f(x)g'(x) \quad \blacksquare \quad (۱۹۲)$$

مثال‌های ساده:

$$(x^2 \cdot e^x)' = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(2 + x) \quad (۱۹۳)$$

$$(x \ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \quad (۱۹۴)$$

$$((x^2+1)(x^3-2))' = 2x(x^3-2) + (x^2+1)(3x^2) \quad (۱۹۵)$$

$$= 2x^4 - 4x + 3x^4 + 3x^2 = 5x^4 + 3x^2 - 4x \quad (۱۹۶)$$

مثال مدیریتی: اگر درآمد $R = P \cdot Q$ و P و Q هر دو تابع زمان باشند:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dP}{dt}Q + P\frac{dQ}{dt}$$

۵.۴.۱۹ مفهوم ۵: قانون تقسیم (Quotient Rule)

قضیه

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

شهود: «مشتق صورت × مخرج − صورت × مشتق مخرج، تقسیم بر مخرج به توان ۲».
یادسپاری: «پایین‌مشتق منهای مشتق‌پایین، بر پایین به توان دو».
مثال‌های ساده:

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1(x+1) - x(1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \quad (۱۹۷)$$

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(1/x)x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad (۱۹۸)$$

$$\left(\frac{e^x}{x^2}\right)' = \frac{e^x x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3} \quad (۱۹۹)$$

مثال مدیریتی: تابع هزینه متوسط $AC(q) = \frac{C(q)}{q}$:

$$AC'(q) = \frac{C'(q) \cdot q - C(q) \cdot 1}{q^2} = \frac{MC \cdot q - C(q)}{q^2} = \frac{MC - AC}{q}$$

یعنی اگر $MC < AC$، هزینه متوسط کاهش می‌یابد.

۶.۴.۱۹ مفهوم ۶: قانون زنجیره‌ای (Chain Rule)

قضیه

اگر $y = f(u)$ و $u = g(x)$، آنگاه:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

یا به‌طور معادل:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

شهود: «مشتق بیرونی ضربدر مشتق درونی».
مثال‌های ساده:

$$((3x+1)^5)' = 5(3x+1)^4 \cdot 3 = 15(3x+1)^4 \quad (۲۰۰)$$

$$(e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2} \quad (۲۰۱)$$

$$(\ln(2x+1))' = \frac{1}{2x+1} \cdot 2 = \frac{2}{2x+1} \quad (۲۰۲)$$

$$(\sqrt{x^2+1})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad (۲۰۳)$$

زنجیره چندلایه: $f(x) = e^{\sin(x^2)}$:

$$f'(x) = e^{\sin(x^2)} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x = 2x\cos(x^2)e^{\sin(x^2)}$$

مثال مدیریتی: اگر $Q(L) = 10L^{0.5}$ و $L(t) = 4t + 1$:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dL} \cdot \frac{dL}{dt} = \frac{5}{\sqrt{L}} \cdot 4 = \frac{20}{\sqrt{4t+1}}$$

۷.۴.۱۹ مفهوم ۷: مشتق توابع نمایی

قضیه

$$(e^x)' = e^x \tag{۲۰۴}$$
$$(a^x)' = a^x \ln a \tag{۲۰۵}$$
$$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x) \tag{۲۰۶}$$
$$(a^{f(x)})' = a^{f(x)} \ln a \cdot f'(x) \tag{۲۰۷}$$

شهود: مشتق e^x همان خودش است — این خاصیت منحصربه‌فرد e است.

مثال‌های ساده:

$$(e^{3x})' = 3e^{3x} \tag{۲۰۸}$$
$$(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2} \tag{۲۰۹}$$
$$(2^x)' = 2^x \ln 2 \tag{۲۱۰}$$
$$(5^{2x})' = 5^{2x} \ln 5 \cdot 2 = 2 \ln 5 \cdot 5^{2x} \tag{۲۱۱}$$

مثال مدیریتی: ارزش سرمایه با بهره پیوسته $A(t) = Pe^{rt}$:

$$A'(t) = rPe^{rt} = rA(t)$$

یعنی نرخ رشد سرمایه، متناسب با خود سرمایه است.

۸.۴.۱۹ مفهوم ۸: مشتق توابع لگاریتمی

قضیه

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{۲۱۲}$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \tag{۲۱۳}$$
$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \tag{۲۱۴}$$

مثال‌های ساده:

$$(\ln(3x))' = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x} \tag{۲۱۵}$$
$$(\ln(x^2+1))' = \frac{2x}{x^2+1} \tag{۲۱۶}$$
$$(\log_{10} x)' = \frac{1}{x \ln 10} \tag{۲۱۷}$$

مشتق لگاریتمی: روش قدرتمند برای توابع پیچیده ضرب و تقسیم:

$$y = f(x) \Rightarrow \ln y = \ln f(x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = (\ln f(x))' \Rightarrow y' = y \cdot (\ln f(x))'$$

مثال: $y = x^x$. با لگاریتم‌گیری:

$$\ln y = x \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow y' = x^x(\ln x + 1)$$

مثال مدیریتی: تابع مطلوبیت $U(x) = \ln(x)$:

$$U'(x) = \frac{1}{x}$$

یعنی مطلوبیت نهایی با افزایش مصرف کاهش می‌یابد.

۹.۴.۱۹ مفهوم ۹: مشتق توابع مثلثاتی

قضیه

$$(\sin x)' = \cos x \tag{۲۱۸}$$
$$(\cos x)' = -\sin x \tag{۲۱۹}$$
$$(\tan x)' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{۲۲۰}$$
$$(\cot x)' = -\csc^2 x \tag{۲۲۱}$$
$$(\sec x)' = \sec x \tan x \tag{۲۲۲}$$
$$(\csc x)' = -\csc x \cot x \tag{۲۲۳}$$

مثال‌های ساده:

$$(\sin(3x))' = 3\cos(3x) \tag{۲۲۴}$$
$$(\cos(x^2))' = -2x\sin(x^2) \tag{۲۲۵}$$
$$(\tan(2x))' = 2\sec^2(2x) \tag{۲۲۶}$$

مثال مدیریتی: مدل‌سازی تقاضای فصلی با $Q(t) = 100 + 50\sin(\pi t/6)$:

$$Q'(t) = \frac{50\pi}{6}\cos(\pi t/6) \approx 26.18\cos(\pi t/6)$$

۱۰.۴.۱۹ مفهوم ۱۰: مشتق مرتبه بالاتر

تعریف: مشتق دوم، مشتق مشتق اول است و به همین ترتیب.

نمادها: $f''(x)$، $f'''(x)$، $f^{(n)}(x)$.

مثال: $f(x) = x^5 + 2x^3 - x$.

$$f'(x) = 5x^4 + 6x^2 - 1 \tag{۲۲۷}$$
$$f''(x) = 20x^3 + 12x \tag{۲۲۸}$$
$$f'''(x) = 60x^2 + 12 \tag{۲۲۹}$$
$$f^{(4)}(x) = 120x \tag{۲۳۰}$$
$$f^{(5)}(x) = 120 \tag{۲۳۱}$$
$$f^{(6)}(x) = 0 \tag{۲۳۲}$$

تفسیر مدیریتی:

- $P'(q)$: نرخ تغییر سود.
- $P''(q)$: شتاب تغییر سود.
- $P''(q) > 0$: سود با نرخ صعودی رشد می‌کند (شتاب مثبت).
- $P''(q) < 0$: سود با نرخ نزولی رشد می‌کند (شتاب منفی).

۱۱.۴.۱۹ مفهوم ۱۱: مشتق ضمنی (Implicit Differentiation)

تعریف: وقتی تابع به‌صورت $F(x, y) = 0$ داده شده باشد، از مشتق ضمنی استفاده می‌کنیم.
روش:

۱. دو طرف را نسبت به x مشتق بگیر.

۲. هر جا y دیدی، $\frac{dy}{dx}$ را ضرب کن (قانون زنجیره‌ای).

۳. $\frac{dy}{dx}$ را حل کن.

مثال: $x^2 + y^2 = 25$.

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

مثال مدیریتی: اگر تابع مطلوبیت $U(x, y) = x^2y^3 = 100$، نرخ نهایی جانشینی:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^3}{3x^2y^2} = -\frac{2y}{3x}$$

۱۲.۴.۱۹ مفهوم ۱۲: مشتق پارامتری

تعریف: اگر $x = x(t)$ و $y = y(t)$، آنگاه:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

مثال: $x = t^2$، $y = t^3$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3t}{2}$$

۱۳.۴.۱۹ مفهوم ۱۳: قوانین مشتق‌گیری توابع معکوس

قضیه: اگر f معکوس‌پذیر و مشتق‌پذیر باشد:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

مثال: $f(x) = e^x$، $f^{-1}(x) = \ln x$:

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

تابع	مشتق
c	0
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$1/x$
$\log_a x$	$1/(x \ln a)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$f \cdot g$	$f'g + fg'$
f/g	$(f'g - fg')/g^2$
$f(g(x))$	$f'(g) \cdot g'$

۱۴.۴.۱۹ مفهوم ۱۴: جدول خلاصه قوانین

۱۵.۴.۱۹ مفهوم ۱۵: کاربرد در تحلیل نهایی

مثال ترکیبی: تابع سود $P(q) = q \cdot D(q) - C(q)$ که $D(q) = 100 - 2q$ و $C(q) = q^3 - 10q^2 + 50q + 100$.

$$R(q) = q(100 - 2q) = 100q - 2q^2 \quad (۲۳۳)$$
$$P(q) = 100q - 2q^2 - q^3 + 10q^2 - 50q - 100 \quad (۲۳۴)$$
$$= -q^3 + 8q^2 + 50q - 100 \quad (۲۳۵)$$
$$P'(q) = -3q^2 + 16q + 50 \quad (۲۳۶)$$
$$P''(q) = -6q + 16 \quad (۲۳۷)$$

نقطه بهینه: $P'(q) = 0 \Rightarrow 3q^2 - 16q - 50 = 0 \Rightarrow q \approx 7.55$.

۵.۱۹ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: قانون توان + ضریب
صورت مسئله: $f(x) = 7x^5 - 3x^2 + 8$.
مرحله ۱: $f'(x) = 35x^4 - 6x$.
نتیجه: $f'(x) = 35x^4 - 6x$.

مثال حل‌شده

مثال ۲: قانون ضرب
صورت مسئله: $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 2)$.
مرحله ۱: $f' = 2x(x^3 - 2) + (x^2 + 1)(3x^2)$.
مرحله ۲: $= 2x^4 - 4x + 3x^4 + 3x^2 = 5x^4 + 3x^2 - 4x$.
نتیجه: $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 - 4x$.

مثال حل‌شده

مثال ۳: قانون تقسیم

صورت مسئله: $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$.

مرحله ۱: $f' = \frac{3(x+2)-(3x-1)(1)}{(x+2)^2}$.

مرحله ۲: $= \frac{3x+6-3x+1}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$.

نتیجه: $f'(x) = \frac{7}{(x+2)^2}$.

مثال حل‌شده

مثال ۴: زنجیره‌ای

صورت مسئله: $f(x) = (2x^3 + 5x)^4$.

مرحله ۱: $f' = 4(2x^3 + 5x)^3 \cdot (6x^2 + 5)$.

نتیجه: $f'(x) = 4(6x^2 + 5)(2x^3 + 5x)^3$.

مثال حل‌شده

مثال ۵: زنجیره‌ای نمایی

صورت مسئله: $f(x) = e^{x^2+3x}$.

مرحله ۱: $f' = e^{x^2+3x} \cdot (2x + 3)$.

نتیجه: $f'(x) = (2x + 3)e^{x^2+3x}$.

مثال حل‌شده

مثال ۶: لگاریتمی

صورت مسئله: $f(x) = \ln(x^3 + 1)$.

مرحله ۱: $f' = \frac{3x^2}{x^3+1}$.

نتیجه: $f'(x) = \frac{3x^2}{x^3+1}$.

مثال حل‌شده

مثال ۷: ضرب + زنجیره‌ای

صورت مسئله: $f(x) = x^2 e^{3x}$.

مرحله ۱: $f' = 2xe^{3x} + x^2 \cdot 3e^{3x}$.

مرحله ۲: $= xe^{3x}(2 + 3x)$.

نتیجه: $f'(x) = xe^{3x}(3x + 2)$.

مثال حل‌شده

مثال ۸: تقسیم با لگاریتم

صورت مسئله: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

مرحله ۱: $f' = \frac{(1/x)\cdot x - \ln x}{(x)^2}$.

مرحله ۲: $= \frac{1-\ln x}{x^2}$.

نتیجه: $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

مثال حل‌شده

مثال ۹: مشتق لگاریتمی
صورت مسئله: $f(x) = x^x$.
مرحله ۱: $\ln y = x \ln x$.
مرحله ۲: $\frac{y'}{y} = \ln x + 1$.
مرحله ۳: $y' = x^x(\ln x + 1)$.
نتیجه: $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۰: مشتق دوم
صورت مسئله: $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x$.
مرحله ۱: $f' = 4x^3 - 9x^2 + 2$.
مرحله ۲: $f'' = 12x^2 - 18x$.
نتیجه: $f''(x) = 12x^2 - 18x$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۱: ضمنی
صورت مسئله: $x^2 + xy + y^2 = 7$. $\frac{dy}{dx}$.
مرحله ۱: $2x + y + xy' + 2yy' = 0$.
مرحله ۲: $y'(x + 2y) = -2x - y$.
مرحله ۳: $y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$.
نتیجه: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۲: هزینه نهایی
صورت مسئله: $C(q) = q^3 - 6q^2 + 15q + 100$. هزینه نهایی در $q = 5$.
مرحله ۱: $C'(q) = 3q^2 - 12q + 15$.
مرحله ۲: $C'(5) = 75 - 60 + 15 = 30$.
نتیجه: ۳۰.

مثال حل‌شده

مثال ۱۳: درآمد نهایی
صورت مسئله: $P = 200 - 4Q$. تابع درآمد و درآمد نهایی.
مرحله ۱: $R = PQ = 200Q - 4Q^2$.
مرحله ۲: $MR = R' = 200 - 8Q$.
نتیجه: $MR = 200 - 8Q$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۴: کشش
صورت مسئله: $Q = 1000 - 20P$. کشش در $P = 25$.
مرحله ۱: $dQ/dP = -20$.
مرحله ۲: $Q(25) = 1000 - 500 = 500$.
مرحله ۳: $E = -20 \cdot 25/500 = -1$.
نتیجه: کشش واحد.

مثال حل‌شده

مثال ۱۵: ترکیب چند قانون
صورت مسئله: $f(x) = (x^2+1)^3 e^{2x} \ln x$.
مرحله ۱: با قانون ضرب (سه‌عاملی):

$$f' = 6x(x^2+1)^2 e^{2x} \ln x + (x^2+1)^3 \cdot 2e^{2x} \ln x + (x^2+1)^3 e^{2x} \cdot \frac{1}{x}$$

مرحله ۲: فاکتورگیری:

$$f' = (x^2+1)^2 e^{2x} \left[6x \ln x + 2(x^2+1)\ln x + \frac{x^2+1}{x} \right]$$

نتیجه: مشتق به‌دست آمده.

مثال حل‌شده

مثال ۱۶: بهره‌وری نهایی
صورت مسئله: $Q(L) = 50L^{0.7}$. بهره‌وری نهایی در $L = 100$.
مرحله ۱: $Q'(L) = 35L^{-0.3}$.
مرحله ۲: $Q'(100) = 35 \cdot (100)^{-0.3} \approx 35 \cdot 0.2512 \approx 8.79$.
نتیجه: بهره‌وری نهایی ≈ 8.79.

مثال حل‌شده

مثال ۱۷: مشتق تابع مطلوبیت
صورت مسئله: $U(x) = 100\ln(x+1)$. مطلوبیت نهایی در $x = 10$.
مرحله ۱: $U'(x) = 100/(x+1)$.
مرحله ۲: $U'(10) = 100/11 \approx 9.09$.
نتیجه: مطلوبیت نهایی ۰۹.۹.

مثال حل‌شده

مثال ۱۸: مشتق a^x
صورت مسئله: $f(x) = 5 \cdot 2^x$.
مرحله ۱: $f' = 5 \cdot 2^x \ln 2$.
نتیجه: $f'(x) = 5\ln 2 \cdot 2^x \approx 3.466 \cdot 2^x$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۹: مشتق $\sqrt{\ }$
صورت مسئله: $f(x) = \sqrt{3x+1}$.
مرحله ۱: $f' = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$.
نتیجه: $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$.

مثال حل‌شده

مثال ۲۰: مشتق مثلثاتی
صورت مسئله: $f(x) = \sin^2(3x)$.
مرحله ۱: $f' = 2\sin(3x)\cdot\cos(3x)\cdot 3$.
مرحله ۲: $= 6\sin(3x)\cos(3x) = 3\sin(6x)$.
نتیجه: $f'(x) = 3\sin(6x)$.

۶.۱۹ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه ۱: فراموش کردن ضرب در n در قانون توان.
راه پیشگیری: $(x^n)' = nx^{n-1}$.
اشتباه ۲: $(fg)' = f'g'$ — کاملاً غلط!
راه پیشگیری: $(fg)' = f'g + fg'$.
اشتباه ۳: فراموش کردن مشتق درونی در زنجیره‌ای.
راه پیشگیری: $(f(g))' = f'(g)\cdot g'$.
اشتباه ۴: اشتباه بین $(f/g)'$ و f'/g'.
راه پیشگیری: $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$.
اشتباه ۵: فراموش کردن مشتق $\ln a$ در a^x.
راه پیشگیری: $(a^x)' = a^x \ln a$.
اشتباه ۶: اشتباه در مشتق $\ln f(x)$.
راه پیشگیری: $(\ln f)' = f'/f$.
اشتباه ۷: فراموش کردن مشتق y در مشتق ضمنی.
راه پیشگیری: هر جا y دیدی، y' بنویس.
اشتباه ۸: اشتباه در مشتق مثلثاتی (cos علامت منفی دارد).
راه پیشگیری: $(\cos x)' = -\sin x$.

۷.۱۹ کاربرد در مدیریت

کاربرد مدیریتی

کاربرد ۱: تحلیل هزینه نهایی
$MC = C'(q)$ — تصمیم برای تولید اضافه.
کاربرد ۲: تحلیل درآمد نهایی
$MR = R'(q)$ — قیمت‌گذاری بهینه.
کاربرد ۳: بهره‌وری نهایی
MP_L — استخدام بهینه.
کاربرد ۴: مطلوبیت نهایی
MU — تخصیص بهینه بودجه.
کاربرد ۵: کشش
تحلیل حساسیت قیمت.
کاربرد ۶: نرخ رشد
y'/y — نرخ رشد نسبی متغیر.
کاربرد ۷: نقطه عطف
$P''(q) = 0$ — تغییر رژیم رشد.
کاربرد ۸: مدل‌سازی مالی
مشتق ارزش فعلی، بهره پیوسته.
کاربرد ۹: تحلیل ریسک
مشتق تابع احتمال نقص.
کاربرد ۱۰: پیش‌بینی
مشتق در مدل‌های رگرسیون.

۸.۱۹ خلاصه فصل

قانون	فرمول
توان	$(x^n)' = nx^{n-1}$
ضریب	$(cf)' = cf'$
جمع	$(f+g)' = f'+g'$
ضرب	$(fg)' = f'g + fg'$
تقسیم	$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$
زنجیره‌ای	$(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$
نمایی	$(e^x)' = e^x$ ،$(a^x)' = a^x \ln a$
لگاریتمی	$(\ln x)' = 1/x$
مثلثاتی	$(\sin x)' = \cos x$
معکوس	$(f^{-1})'(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$

۹.۱۹ خودآزمایی

۱.۹.۱۹ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. $(x^6)'$:

آ) $6x^5$

ب) $5x^6$

ج) x^5

د) $6x^6$

۲. $(e^{5x})'$:

آ) e^{5x}

ب) $5e^{5x}$

ج) $5xe^{5x}$

د) $e^{5x}/5$

۳. $(\ln(2x))'$:

آ) $1/(2x)$

ب) $2/x$

ج) $1/x$

د) $\ln 2/x$

۴. $(xe^x)'$:

آ) e^x

ب) xe^x

ج) $e^x(1+x)$

د) $e^x(x-1)$

۵. $(\sin(3x))'$:

آ) $\cos(3x)$

ب) $3\cos(3x)$

ج) $-3\cos(3x)$

د) $3\sin(3x)$

۶. $(\sqrt{x^2+1})'$:

آ) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

ب) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

ج) $\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

د) $\frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$

۷. $(3^x)'$:

آ) 3^x

ب) $x \cdot 3^{x-1}$

ج) $3^x \ln 3$

د) $3^x / \ln 3$

۸. $\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'$:

آ) $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

ب) $\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

ج) $\frac{1}{(x^2+1)^2}$

د) $\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

۹. مشتق دوم $f(x) = x^3$:

آ) $3x^2$

ب) $6x$

ج) 6

د) x

۱۰. $(\cos(2x))'$:

آ) $\sin(2x)$

ب) $2\sin(2x)$

ج) $-2\sin(2x)$

د) $-2\cos(2x)$

۱۱. $(x^2 \ln x)'$:

آ) $2x \ln x$

ب) x

ج) $2x \ln x + x$

د) $2x \ln x - x$

۱۲. $(e^{-x^2})'$:

آ) e^{-x^2}

ب) $-2xe^{-x^2}$

ج) $2xe^{-x^2}$

د) $-e^{-x^2}$

۱۳. $(5x^4 - 2x + 3)'$:

آ) $20x^3 - 2$

ب) $20x^3 - 2x$

ج) $5x^3 - 2$

د) $20x^4 - 2$

۱۴. $(\ln(x^2))'$:

آ) $1/x^2$

ب) $2/x$

ج) $2x$

د) $1/(2x)$

۱۵. $((2x + 1)^3)'$:

آ) $3(2x + 1)^2$

ب) $6(2x + 1)^2$

ج) $6(2x + 1)^3$

د) $(2x + 1)^2$

۲.۹.۱۹ تشریحی (۸ سوال)

۱۶. مشتق $f(x) = 4x^5 - 3x^3 + 2x - 7$.

۱۷. مشتق $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 2)$.

۱۸. مشتق $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$.

۱۹. مشتق $f(x) = e^{3x} \ln x$.

۲۰. مشتق $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.

۲۱. مشتق دوم $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$.

۲۲. مشتق $f(x) = \sin(x) \cos(x)$.

۲۳. مشتق $f(x) = \frac{\ln x}{x^2+1}$.

۱۰.۱۹ پاسخنامه تشریحی

۱. الف) $6x^5$.

۲. ب) $5e^{5x}$.

۳. ج) $1/x$.

۴. ج) $e^x + xe^x = e^x(1 + x)$.

۵. ب) $3\cos(3x)$.

۶. ب) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

۷. ج) $3^x \ln 3$.

۸. الف) $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(1)(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2}$.

۹. ب) $f' = 3x^2$، $f'' = 6x$.

۱۰. ج) $-2\sin(2x)$.

۱۱. **ج)** $2x\ln x + x^2\cdot 1/x = 2x\ln x + x$.
۱۲. **ب)** $-2xe^{-x^2}$.
۱۳. **الف)** $20x^3 - 2$.
۱۴. **ب)** $\frac{2x}{x^2} = 2/x$.
۱۵. **ب)** $3(2x+1)^2\cdot 2 = 6(2x+1)^2$.
۱۶. $f'(x) = 20x^4 - 9x^2 + 2$.
۱۷. $f' = 2x(3x-2) + (x^2+1)(3) = 6x^2 - 4x + 3x^2 + 3 = 9x^2 - 4x + 3$.
۱۸. $f' = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$.
۱۹. $f' = 3e^{3x}\ln x + e^{3x}\cdot\frac{1}{x} = e^{3x}(3\ln x + 1/x)$.
۲۰. $f' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.
۲۱. $f' = 5x^4 - 6x^2 + 1$، $f'' = 20x^3 - 12x$.
۲۲. $f' = \cos x\cdot\cos x + \sin x\cdot(-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$.
۲۳. $f' = \frac{(1/x)(x^2+1)-\ln x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)/x - 2x\ln x}{(x^2+1)^2}$.

۱۱.۱۹ منابع پیشنهادی

- پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. فصل ۱۵.
- رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. فصل ۱۵.
- نیکوکار، م. (۱۳۹۷). *ریاضیات عمومی*. فصل ۱۵.
- T. S. Tan، (۲۰۱۹). *Applied Mathematics for the Managerial، Social and Life Sci-ences*. Ch. ۱۱–۱۲.
- A. S. Salzman، (۲۰۱۷). *Mathematics for Business*. Ch. ۱۱.
- E. Ummer، (۲۰۱۸). *Basic Mathematics for Economics، Finance and Business*. Ch. ۱۲.

ایست بازرسی

پایان فصل ۱۵ — نسخه توسعه‌یافته
آمار: ~۲۴ صفحه A۴ | ۲۰ مثال حل‌شده | ۲۳ سوال | ۶ منبع

xcolor enumitem booktabs geometry amsmath،amssymb،amsthm [۱۲pt،a۴paper]article
xepersian hyperref tcolorbox
margin=۲.۵cm
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)
فصل ۱۶ : دیفرانسیل (نسخه توسعه‌یافته) تیم ۵ نفره معمار آموزشی ۱۳ مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۲۰ فصل ۱۶: دیفرانسیل (نسخه توسعه‌یافته — حجم دوبرابر)

۱.۲۰ چکیده

دیفرانسیل، ابزار تقریب و تخمین در ریاضیات است. اگر مشتق به ما می‌گوید «نرخ تغییر چقدر است؟»، دیفرانسیل به ما می‌گوید «اگر ورودی را کمی تغییر دهیم، خروجی چقدر تغییر می‌کند؟» — بدون نیاز به محاسبه دقیق. در مدیریت، دیفرانسیل برای تقریب سریع، تحلیل حساسیت، تخمین خطا، و پیش‌بینی تغییرات کوچک به کار می‌رود. در این فصل، تعریف دیفرانسیل، رابطه آن با مشتق، تقریب خطی، دیفرانسیل کل، کاربرد در تحلیل حساسیت، تخمین خطا، و کاربردهای گسترده مدیریتی را می‌آموزی. هدف نهایی: بتوانی تغییرات کوچک توابع مدیریتی را با دیفرانسیل تخمین بزنی و از آن برای تصمیم‌گیری سریع استفاده کنی.

۲.۲۰ اهداف یادگیری

- **تعریف کند:** دیفرانسیل، دیفرانسیل کل، تقریب خطی، خطای نسبی، خطای مطلق.
- **محاسبه کند:** دیفرانسیل توابع ساده و مرکب، تقریب مقادیر، تخمین خطا.
- **تحلیل کند:** رابطه بین Δy و dy، دقت تقریب، شرایط اعتبار.
- **به‌کار برد:** تقریب خطی برای محاسبات سریع مدیریتی.
- **مدل‌سازی کند:** تحلیل حساسیت، تخمین تغییر سود، پیش‌بینی هزینه.
- **ارزیابی کند:** خطای تقریب و محدودیت‌های دیفرانسیل.

۳.۲۰ مقدمه طنز

تصور کن یک مدیر مالی می‌خواهد بداند «اگر نرخ بهره از ۵٪ به ۵.۱٪ افزایش یابد، ارزش فعلی سرمایه‌گذاری چقدر تغییر می‌کند؟» اگر بخواهد دقیق حساب کند، باید کل فرمول ارزش فعلی را دوباره محاسبه کند — کاری زمان‌بر. اما اگر «دیفرانسیل» بلد باشد، می‌تواند در چند ثانیه تخمین بزند: تغییر ارزش فعلی، تقریباً برابر مشتق ضربدر تغییر نرخ بهره است.

دیفرانسیل مثل «خط‌کش سریع» است: به جای اینکه با متر دقیق، همه‌چیز را اندازه بگیری، با یک نگاه تقریبی می‌فهمی چه خبر است. در مدیریت، این تقریب سریع می‌تواند تفاوت بین تصمیم به‌موقع و تصمیم دیرهنگام باشد.

نکته طنزآمیز ماجرا اینجاست: بسیاری از افراد فکر می‌کنند «دیفرانسیل و مشتق یکی هستند» و اشتباهاً از آن استفاده می‌کنند. اما تفاوت مهمی وجود دارد: مشتق، «نرخ تغییر» است (مثل ۵ واحد در هر واحد)؛ دیفرانسیل، «مقدار تغییر» است (مثل ۰.۵ واحد). اگر مدیر این تفاوت را نداند، ممکن است پیش‌بینی‌اش ده برابر اشتباه شود. این فصل، تو را از «اشتباه بین نرخ و مقدار» به «دقت در تفسیر» می‌برد.

۴.۲۰ مفاهیم اصلی

۱.۴.۲۰ مفهوم ۱: تعریف دیفرانسیل

تعریف: اگر $y = f(x)$ و f مشتق‌پذیر باشد، دیفرانسیل y (نمایش: dy) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$dy = f'(x)\,dx$$

که dx یک تغییر کوچک دلخواه در x است (و معمولاً $dx = \Delta x$).

شهود: دیفرانسیل، «تغییر تقریبی» تابع است وقتی ورودی به‌اندازه dx تغییر کند.

تفاوت با تغییر واقعی:

- **تغییر واقعی:** $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.
- **تغییر تقریبی (دیفرانسیل):** $dy = f'(x)\Delta x$.

نکته: برای Δx کوچک: $\Delta y \approx dy$.
مثال ساده: $y = x^2$. دیفرانسیل:

$$dy = 2x\,dx$$

اگر $x = 3$ و $dx = 0.1$:

$$dy = 2(3)(0.1) = 0.6$$

تغییر واقعی: $\Delta y = (3.1)^2 - 9 = 9.61 - 9 = 0.61$. تقریب ۶.۰ بسیار نزدیک است.
مثال مدیریتی: تابع هزینه $C(q) = q^2 + 10q + 100$. اگر $q = 20$ و $dq = 1$:

$$dC = C'(20) \cdot 1 = (2(20) + 10) \cdot 1 = 50$$

یعنی هزینه تقریباً ۵۰ واحد افزایش می‌یابد.

۲.۴.۲۰ مفهوم ۲: تقریب خطی

قضیه

برای x نزدیک به a:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

یا به‌طور معادل:

$$f(a+\Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x$$

شهود: به‌جای محاسبه دقیق تابع، از خط مماس در نقطه a استفاده می‌کنیم.
مثال ساده: تقریب $\sqrt{4.1}$.

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4, \quad f(a) = 2 \tag{۲۳۸}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'(4) = \frac{1}{4} \tag{۲۳۹}$$

$$f(4.1) \approx 2 + \frac{1}{4}(0.1) = 2.025 \tag{۲۴۰}$$

مقدار واقعی: $\sqrt{4.1} \approx 2.0248$. تقریب بسیار نزدیک.
مثال مدیریتی: تابع تولید $Q(L) = 100\sqrt{L}$. اگر L از ۱۰۰ به ۱۰۱ افزایش یابد، تولید چقدر زیاد می‌شود؟

$$Q'(L) = \frac{50}{\sqrt{L}} \tag{۲۴۱}$$

$$Q'(100) = 5 \tag{۲۴۲}$$

$$\Delta Q \approx 5 \times 1 = 5 \text{واحد} \tag{۲۴۳}$$

تولید تقریباً ۵ واحد افزایش می‌یابد.

۳.۴.۲۰ مفهوم ۳: دیفرانسیل کل

تعریف: برای تابع چندمتغیره $z = f(x, y)$، دیفرانسیل کل:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

شهود: تغییر کل تابع = تأثیر تغییر x + تأثیر تغییر y.
مثال ساده: $z = x^2y^3$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2 \tag{۲۴۴}$$

$$dz = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy \tag{۲۴۵}$$

مثال مدیریتی: تابع سود $P(x, y) = 10x + 15y - 2xy$. اگر x از ۵ به ۱.۵ و y از ۱۰ به ۲.۱۰ تغییر کند:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 10 - 2y = 10 - 20 = -10 \tag{۲۴۶}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 15 - 2x = 15 - 10 = 5 \tag{۲۴۷}$$

$$dP = (-10)(0.1) + (5)(0.2) = -1 + 1 = 0 \tag{۲۴۸}$$

سود تقریباً تغییر نمی‌کند.

۴.۴.۲۰ مفهوم ۴: کاربرد در تحلیل حساسیت

تعریف: تحلیل حساسیت بررسی می‌کند که «تغییر در یک پارامتر، چقدر بر خروجی اثر می‌گذارد».
فرمول: اگر $y = f(x)$ و x به‌اندازه Δx تغییر کند:

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{f(x)}$$

کشش (Elasticity):

$$E = \frac{dy/y}{dx/x} = \frac{xf'(x)}{f(x)}$$

مثال مدیریتی: تقاضا $Q = 1000 - 20P$. اگر $P = 30$ و $\Delta P = 1$:

$$Q(30) = 400, \quad Q'(30) = -20 \tag{۲۴۹}$$

$$\Delta Q \approx -20 \times 1 = -20 \tag{۲۵۰}$$

$$\frac{\Delta Q}{Q} \approx -20/400 = -5\% \tag{۲۵۱}$$

افزایش ۱ واحدی قیمت (۳٪)، تقاضا را ۵٪ کاهش می‌دهد.

۵.۴.۲۰ مفهوم ۵: تخمین خطا

تعریف: اگر مقدار اندازه‌گیری‌شده x دارای خطای Δx باشد، خطای خروجی $y = f(x)$:

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

خطای نسبی:

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{f'(x)}{f(x)}\Delta x$$

خطای درصدی:

$$\text{خطای درصدی} = 100 \times \frac{\Delta y}{y}$$

مثال: حجم یک کره $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. اگر خطای اندازه‌گیری r برابر ۱٪ باشد:

$$V'(r) = 4\pi r^2 \tag{۲۵۲}$$

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{4\pi r^2 \cdot \Delta r}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3 \cdot \frac{\Delta r}{r} = 3\% \tag{۲۵۳}$$

خطای حجم، سه برابر خطای شعاع است.

مثال مدیریتی: اگر خطای تخمین تقاضا ۵٪ باشد و تابع سود $P = 100Q - 2Q^2$، خطای سود:

$$\frac{\Delta P}{P} \approx E \cdot \frac{\Delta Q}{Q}$$

که E کشش سود نسبت به تقاضاست.

۶.۴.۲۰ مفهوم ۶: مقایسه Δy و dy

مفهوم	تعریف	تفسیر
Δy	$f(x+\Delta x) - f(x)$	تغییر واقعی
dy	$f'(x)\Delta x$	تغییر تقریبی
خطا	$\lvert\Delta y - dy\rvert$	خطای تقریب

مثال عددی: $y = x^3$، $x = 2$، $\Delta x = 0.1$.

$$\Delta y = (2.1)^3 - 8 = 9.261 - 8 = 1.261 \tag{۲۵۴}$$

$$dy = 3(2)^2(0.1) = 1.2 \tag{۲۵۵}$$

$$\text{خطا} = |1.261 - 1.2| = 0.061 \approx 4.8\% \tag{۲۵۶}$$

نکته: هرچه Δx کوچک‌تر، خطا کمتر.

۷.۴.۲۰ مفهوم ۷: کاربرد در تقریب توابع پیچیده

مثال: تقریب $\sqrt[3]{27.1}$.

$$f(x) = x^{1/3}, \quad a = 27, \quad f(27) = 3 \tag{۲۵۷}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}, \quad f'(27) = \frac{1}{27} \tag{۲۵۸}$$

$$f(27.1) \approx 3 + \frac{1}{27}(0.1) = 3 + 0.0037 = 3.0037 \tag{۲۵۹}$$

مثال مدیریتی: تقریب $\ln(1.02)$.

$$f(x) = \ln x, \quad a = 1, \quad f(1) = 0 \tag{۲۶۰}$$

$$f'(1) = 1 \tag{۲۶۱}$$

$$f(1.02) \approx 0 + 1(0.02) = 0.02 \tag{۲۶۲}$$

مقدار واقعی: $\ln(1.02) \approx 0.0198$. تقریب نزدیک.

۸.۴.۲۰ مفهوم ۸: دیفرانسیل و رگرسیون

کاربرد: در رگرسیون خطی، ضریب β به‌عنوان مشتق تقریبی تفسیر می‌شود:

$$y \approx \alpha + \beta x \Rightarrow dy = \beta\, dx$$

یعنی هر واحد افزایش x، y را به‌اندازه β تغییر می‌دهد.
مثال: اگر رگرسیون فروش بر تبلیغات: تبلیغات $\times\ 5 + 100 =$ فروش:

$$\Delta\text{فروش} \approx 5 \times \Delta\text{تبلیغات}$$

۹.۴.۲۰ مفهوم ۹: دیفرانسیل در بهینه‌سازی

کاربرد: در نزدیکی نقطه بهینه، $f'(x) \approx 0$، پس تغییرات کوچک در x تقریباً تابع را تغییر نمی‌دهند:

$$f(x^* + \Delta x) \approx f(x^*)$$

مثال مدیریتی: اگر سود در نقطه بهینه $q^* = 10$ برابر ۱۰۰ باشد، تغییر q به ۵.۱۰ سود را تقریباً بدون تغییر می‌گذارد (چون مشتق در بهینه صفر است).

۱۰.۴.۲۰ مفهوم ۱۰: تحلیل حساسیت در بهره مرکب

مثال: ارزش آینده $A = Pe^{rt}$. حساسیت نسبت به نرخ r:

$$\frac{\partial A}{\partial r} = Pte^{rt} = tA$$

یعنی تغییر ٪۱ در نرخ، ارزش آینده را حدود $t\%$ تغییر می‌دهد (به‌صورت نسبی).
مثال عددی: $P = 100$، $r = 0.05$، $t = 10$:

$$A = 100e^{0.5} \approx 164.87$$

اگر r به ۰۵۱.۰ تغییر کند:

$$\Delta A \approx tA \cdot \Delta r = 10 \times 164.87 \times 0.001 = 1.6487$$

۱۱.۴.۲۰ مفهوم ۱۱: کاربرد در تحلیل هزینه

مثال: تابع هزینه $C(q) = 0.01q^3 - 0.5q^2 + 100q + 5000$. اگر تولید از ۵۰ به ۵۲ افزایش یابد، هزینه تقریباً چقدر تغییر می‌کند؟

$$C'(q) = 0.03q^2 - q + 100 \tag{۲۶۳}$$

$$C'(50) = 75 - 50 + 100 = 125 \tag{۲۶۴}$$

$$\Delta C \approx 125 \times 2 = 250 \tag{۲۶۵}$$

۱۲.۴.۲۰ مفهوم ۱۲: دیفرانسیل و مشتق لگاریتمی

فرمول:

$$d(\ln y) = \frac{dy}{y}$$

یعنی دیفرانسیل لگاریتم، «نرخ رشد نسبی» است.
مثال مدیریتی: اگر فروش $S = 100e^{0.1t}$:

$$\frac{dS}{S} = 0.1\, dt$$

یعنی نرخ رشد نسبی فروش، ٪۱۰ در هر واحد زمان است.

۱۳.۴.۲۰ مفهوم ۱۳: کاربرد در اقتصاد کلان

تولید ناخالص داخلی: $Y = C + I + G + (X - M)$.
دیفرانسیل:

$$dY = dC + dI + dG + dX - dM$$

مثال: اگر مصرف ۲ واحد، سرمایه‌گذاری ۱ واحد، و صادرات ۵.۰ واحد افزایش یابند:

$$dY \approx 2 + 1 + 0 - 0 = 3$$

۱۴.۴.۲۰ مفهوم ۱۴: خطای تقریب و شرط اعتبار

شرط اعتبار: تقریب خطی وقتی معتبر است که Δx «به‌قدر کافی کوچک» باشد.
معیار خطا: خطای تقریب مرتبه $\mathcal{O}((\Delta x)^2)$ است:

$$\Delta y - dy = \frac{f''(x)}{2}(\Delta x)^2 + \cdots$$

نکته: برای $\Delta x = 0.1$، خطا معمولاً کمتر از ٪۱؛ برای $\Delta x = 1$، ممکن است چند درصد شود.

۱۵.۴.۲۰ مفهوم ۱۵: جمع‌بندی و قواعد

تابع	دیفرانسیل	کاربرد
$y = x^n$	$dy = nx^{n-1}dx$	چندجمله‌ای
$y = e^x$	$dy = e^x dx$	رشد
$y = \ln x$	$dy = dx/x$	نرخ نسبی
$y = \sin x$	$dy = \cos x\, dx$	نوسان
$y = f(g(x))$	$dy = f'(g)g'(x)dx$	مرکب
$z = f(x, y)$	$dz = f_x dx + f_y dy$	چندمتغیره

۵.۲۰ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: محاسبه دیفرانسیل
صورت مسئله: $y = x^3 + 2x$. dy را بیاب و در $x = 2$، $dx = 0.1$ حساب کن.
مرحله ۱: $dy = (3x^2 + 2)dx$.
مرحله ۲: در $x = 2$: $dy = (12 + 2)(0.1) = 1.4$.
نتیجه: $dy = 1.4$.

مثال حل‌شده

مثال ۲: تقریب خطی
صورت مسئله: تقریب $\sqrt{9.1}$.
مرحله ۱: $a = 9$، $f(9) = 3$، $f'(9) = 1/6$.
مرحله ۲: $f(9.1) \approx 3 + (1/6)(0.1) = 3.0167$.
نتیجه: ≈ 3.0167.

مثال حل‌شده

مثال ۳: تحلیل حساسیت تقاضا
صورت مسئله: $Q = 500 - 5P$. اگر $P = 50$ و $\Delta P = 2$، تغییر تقاضا.
مرحله ۱: $dQ/dP = -5$.
مرحله ۲: $\Delta Q \approx -5 \times 2 = -10$.
نتیجه: تقاضا ۱۰ واحد کاهش می‌یابد.

مثال حل‌شده

مثال ۴: تخمین خطا
صورت مسئله: حجم مکعب $V = s^3$. اگر خطای s برابر ٪۲ باشد، خطای V.
مرحله ۱: $dV/V = 3 \cdot ds/s = 3 \times 2\% = 6\%$.
نتیجه: خطای حجم ٪۶.

مثال حل‌شده

مثال ۵: تقریب ln
صورت مسئله: تقریب $\ln(1.05)$.
مرحله ۱: $f(1) = 0$، $f'(1) = 1$.
مرحله ۲: $f(1.05) \approx 0 + 1(0.05) = 0.05$.
نتیجه: $0.05 \approx$ (واقعی: ۰.۰۴۸۸).

مثال حل‌شده

مثال ۶: دیفرانسیل کل
صورت مسئله: $z = x^2 y$. dz در $x = 3$، $y = 4$، $dx = 0.1$، $dy = 0.2$.
مرحله ۱: $dz = 2xy\,dx + x^2\,dy$.
مرحله ۲: $= 2(3)(4)(0.1) + 9(0.2) = 2.4 + 1.8 = 4.2$.
نتیجه: $dz = 4.2$.

مثال حل‌شده

مثال ۷: تقریب در بهره
صورت مسئله: $A = 100(1 + r)^{10}$. اگر r از ۰.۰۵ به ۰.۰۵۵ تغییر کند، تغییر A.
مرحله ۱: $dA/dr = 100 \cdot 10(1 + r)^9 = 1000(1.05)^9 \approx 1551.3$.
مرحله ۲: $\Delta A \approx 1551.3 \times 0.005 \approx 7.76$.
نتیجه: تغییر ≈ 7.76.

مثال حل‌شده

مثال ۸: هزینه نهایی
صورت مسئله: $C(q) = q^2 + 20q + 500$. اگر تولید از ۳۰ به ۳۲ افزایش یابد، تغییر هزینه.
مرحله ۱: $C'(q) = 2q + 20$، $C'(30) = 80$.
مرحله ۲: $\Delta C \approx 80 \times 2 = 160$.
نتیجه: هزینه ۱۶۰ واحد افزایش.

مثال حل‌شده

مثال ۹: تقریب مثلثاتی
صورت مسئله: تقریب $\sin(0.1)$ (رادیان).
مرحله ۱: $f(0) = 0$، $f'(0) = \cos 0 = 1$.
مرحله ۲: $\sin(0.1) \approx 0 + 1(0.1) = 0.1$.
نتیجه: $0.1 \approx$ (واقعی: ۰.۰۹۹۸).

مثال حل‌شده

مثال ۱۰: تحلیل حساسیت سود
صورت مسئله: $P(q) = -q^2 + 100q - 500$. اگر q از ۵۰ به ۵۱ تغییر کند.
مرحله ۱: $P'(q) = -2q + 100$، $P'(50) = 0$.
مرحله ۲: $\Delta P \approx 0 \times 1 = 0$.
نتیجه: در نقطه بهینه، تغییر کوچک تولید، سود را تغییر نمی‌دهد.

مثال حل‌شده

مثال ۱۱: نرخ رشد نسبی
صورت مسئله: فروش $S = 200e^{0.15t}$. نرخ رشد نسبی.
مرحله ۱: $dS/S = 0.15\,dt$.
مرحله ۲: یعنی ۱۵٪ در هر واحد زمان.
نتیجه: نرخ رشد نسبی ۱۵٪.

مثال حل‌شده

مثال ۱۲: تقریب توان
صورت مسئله: تقریب $(1.02)^{10}$.
مرحله ۱: $f(x) = x^{10}$، $a = 1$، $f(1) = 1$، $f'(1) = 10$.
مرحله ۲: $f(1.02) \approx 1 + 10(0.02) = 1.2$.
نتیجه: $1.2 \approx$ (واقعی: ۱.۲۱۹).

مثال حل‌شده

مثال ۱۳: دیفرانسیل کل سود
صورت مسئله: $P(x, y) = 20x + 30y - xy$. اگر $x = 10, y = 20$، $dx = 0.5, dy = 1$.
مرحله ۱: $P_x = 20 - y = 0$، $P_y = 30 - x = 20$.
مرحله ۲: $dP = 0(0.5) + 20(1) = 20$.
نتیجه: $dP = 20$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۴: تحلیل حساسیت هزینه
صورت مسئله: $C(q) = 0.1q^2 + 50q + 10000$. اگر q از ۱۰۰ به ۱۰۳ تغییر کند.
مرحله ۱: $C'(q) = 0.2q + 50$، $C'(100) = 70$.
مرحله ۲: $\Delta C \approx 70 \times 3 = 210$.
نتیجه: هزینه ۲۱۰ واحد افزایش.

مثال حل‌شده

مثال ۱۵: تقریب $\sqrt[3]{8.2}$
صورت مسئله: تقریب.
مرحله ۱: $f(8) = 2$، $f'(8) = 1/12$.
مرحله ۲: $f(8.2) \approx 2 + (1/12)(0.2) = 2.0167$.
نتیجه: ≈ 2.0167.

مثال حل‌شده

مثال ۱۶: خطای اندازه‌گیری
صورت مسئله: مساحت دایره $A = \pi r^2$. اگر خطای r برابر ٪۱، خطای A.
مرحله ۱: $dA/A = 2 \cdot dr/r = 2\%$.
نتیجه: خطای مساحت ٪۲.

مثال حل‌شده

مثال ۱۷: تقریب تابع تولید
صورت مسئله: $Q(L) = 50L^{0.5}$. اگر L از ۱۰۰ به ۱۰۴، تغییر تولید.
مرحله ۱: $Q'(L) = 25L^{-0.5}$، $Q'(100) = 2.5$.
مرحله ۲: $\Delta Q \approx 2.5 \times 4 = 10$.
نتیجه: ۱۰ واحد افزایش.

مثال حل‌شده

مثال ۱۸: تحلیل حساسیت ارزش فعلی
صورت مسئله: $PV = 1000/(1+r)^5$. اگر $r = 0.08$ و $\Delta r = 0.01$.
مرحله ۱: $PV'(r) = -5000/(1+r)^6$.
مرحله ۲: $PV'(0.08) = -5000/(1.08)^6 \approx -3151.7$.
مرحله ۳: $\Delta PV \approx -3151.7 \times 0.01 \approx -31.5$.
نتیجه: PV حدود ۵.۳۱ کاهش.

مثال حل‌شده

مثال ۱۹: تقریب $\ln(0.98)$
صورت مسئله: تقریب.
مرحله ۱: $f(1) = 0$، $f'(1) = 1$.
مرحله ۲: $f(0.98) \approx 0 + 1(-0.02) = -0.02$.
نتیجه: $-0.02 \approx$ (واقعی: ۰.۰۲۰۲۰-).

مثال حل‌شده

مثال ۲۰: مقایسه Δy و dy
صورت مسئله: $y = x^2$، $x = 5$، $\Delta x = 0.2$.
مرحله ۱: $\Delta y = 5.2^2 - 25 = 2.04$.
مرحله ۲: $dy = 10(0.2) = 2.0$.
مرحله ۳: خطا: ۰۴.۰ (۲٪).
نتیجه: تقریب نزدیک است.

۶.۲۰ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه ۱: اشتباه بین دیفرانسیل و مشتق.
راه پیشگیری: مشتق = نرخ، دیفرانسیل = مقدار تغییر.
اشتباه ۲: فراموش کردن dx در فرمول دیفرانسیل.
راه پیشگیری: $dy = f'(x)dx$.
اشتباه ۳: استفاده از دیفرانسیل برای تغییرات بزرگ.
راه پیشگیری: دیفرانسیل فقط برای Δx کوچک معتبر است.
اشتباه ۴: فراموش کردن دیفرانسیل در توابع چندمتغیره.
راه پیشگیری: $dz = f_x dx + f_y dy$.
اشتباه ۵: اشتباه در تفسیر خطای نسبی.
راه پیشگیری: خطای نسبی = $\Delta y / y$.
اشتباه ۶: فراموش کردن علامت منفی در توابع نزولی.
راه پیشگیری: علامت مشتق را در دیفرانسیل حفظ کن.
اشتباه ۷: فرض دقت ۱۰۰٪ تقریب.
راه پیشگیری: خطا $\sim (\Delta x)^2$.

۷.۲۰ کاربرد در مدیریت

کاربرد مدیریتی

کاربرد ۱: تحلیل حساسیت
بررسی اثر تغییر کوچک در قیمت، هزینه یا تولید بر سود.
کاربرد ۲: تقریب سریع
محاسبه سریع مقادیر پیچیده (مثل $\sqrt{}$ و $\ln$) در جلسات.
کاربرد ۳: تخمین خطا
برآورد خطای اندازه‌گیری و تأثیر آن بر نتایج.
کاربرد ۴: تحلیل نهایی
تخمین تغییر سود با تغییر کوچک در تولید.
کاربرد ۵: بهینه‌سازی
بررسی حساسیت اطراف نقطه بهینه.
کاربرد ۶: مالی
تخمین تغییر ارزش فعلی با تغییر نرخ بهره.
کاربرد ۷: تولید
تخمین تغییر هزینه با تغییر تولید.
کاربرد ۸: بازاریابی
تخمین تغییر تقاضا با تغییر قیمت.
کاربرد ۹: اقتصاد کلان
تخمین تغییر GDP با تغییر اجزای آن.
کاربرد ۱۰: تصمیم‌گیری سریع
در جلسات، تخمین سریع به‌جای محاسبه دقیق.

۸.۲۰ خلاصه فصل

مفهوم	فرمول	کاربرد
دیفرانسیل	$dy = f'(x)dx$	تغییر تقریبی
تقریب خطی	$f(a+\Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x$	محاسبه سریع
دیفرانسیل کل	$dz = f_x dx + f_y dy$	چندمتغیره
خطای نسبی	$\Delta y/y \approx (f'/f)\Delta x$	تخمین خطا
نرخ رشد نسبی	$d(\ln y) = dy/y$	رشد
کشش	$E = (xf')/f$	حساسیت

۹.۲۰ خودآزمایی

۱.۹.۲۰ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. دیفرانسیل $y = x^4$:

آ) $4x^3$

ب) $4x^3 dx$

ج) $x^4 dx$

د) $4x^4 dx$

۲. دیفرانسیل $y = e^{2x}$:

آ) $e^{2x} dx$

ب) $2e^{2x} dx$

ج) $2xe^{2x} dx$

د) e^{2x}

۳. تقریب $\sqrt{16.1}$:

آ) ۰۱۲۵.۴

ب) ۱.۴

ج) ۰۱.۴

د) ۲.۴

۴. دیفرانسیل $y = \ln x$:

آ) dx/x

ب) $x\,dx$

ج) $\ln x\,dx$

د) $1/x$

۵. اگر $f(x) = x^2$، $x = 3$، $dx = 0.1$، dy:

آ) ۳.۰

ب) ۶.۰

ج) ۹.۰

د) ۲.۱

۶. خطای نسبی حجم مکعب با خطای ٪۱ در ضلع:

آ) ٪۱

ب) ٪۲

ج) ٪۳

د) ٪۴

۷. تقریب $\ln(1.02)$:

آ) ۰۲.۰

ب) ۲.۰

ج) ۰۰۲.۰

د) ۰۰۰۲.۰

۸. دیفرانسیل $z = x^2 y$:

آ) $2xy\,dx$

ب) $x^2\,dy$

ج) $2xy\,dx + x^2\,dy$

د) $2x\,dx + y\,dy$

۹. اگر $C(q) = q^2 + 10q$، $q = 10$، $\Delta q = 1$، $\Delta C \approx$:

آ) ۲۰

ب) ۳۰

ج) ۴۰

د) ۵۰

۱۰. تقریب $\sin(0.02)$:

آ) ۰۲.۰

ب) ۲.۰

ج) ۰۰۲.۰

د) ۰۰۰۲.۰

۱۱. خطای نسبی مساحت دایره با خطای ٪۲ در شعاع:

آ) ٪۱

ب) ٪۲

ج) ٪۳

د) ٪۴

۱۲. دیفرانسیل $y = \sin(3x)$:

آ) $\cos(3x)dx$

ب) $3\cos(3x)dx$

ج) $-3\cos(3x)dx$

د) $3\sin(3x)dx$

۱۳. اگر فروش $S = 500e^{0.1t}$، نرخ رشد نسبی:

آ) ٪۱

ب) ۵٪

ج) ۱۰٪

د) ۵۰٪

۱۴. تقریب $(1.01)^{20}$:

آ) ۱.۱

ب) ۲.۱

ج) ۳.۱

د) ۵.۱

۱۵. برای $y = x^2$، Δy و dy در $x = 2$، $\Delta x = 0.1$:

آ) $\Delta y = dy$

ب) $\Delta y > dy$

ج) $\Delta y < dy$

د) نامشخص

۲.۹.۲۰ تشریحی (۸ سوال)

۱۶. دیفرانسیل $y = x^5 - 3x^2 + 2x$.

۱۷. تقریب $\sqrt{25.2}$.

۱۸. اگر $V = s^3$ و خطای s برابر ۰.۵٪، خطای V.

۱۹. دیفرانسیل کل $z = x^3 + y^2$ در $x = 2, y = 3, dx = 0.1, dy = 0.2$.

۲۰. تقریب $\ln(1.1)$.

۲۱. اگر $P(q) = -2q^2 + 80q - 200$، تغییر سود اگر q از ۲۰ به ۲۱.

۲۲. دیفرانسیل $y = \frac{1}{x}$.

۲۳. تحلیل حساسیت $PV = 5000/(1+r)^{10}$ در $r = 0.05$، $\Delta r = 0.005$.

۱۰.۲۰ پاسخنامه تشریحی

۱. ب) $dy = 4x^3 dx$.

۲. ب) $dy = 2e^{2x} dx$.

۳. الف) $f(16) = 4$، $f'(16) = 1/8$، $4 + (1/8)(0.1) = 4.0125$.

۴. الف) $dy = dx/x$.

۵. ب) $dy = 2(3)(0.1) = 0.6$.

۶. ج) $dV/V = 3 \cdot ds/s = 3\%$.

۷. الف) $\ln(1.02) \approx 0.02$.

۸. ج) $dz = 2xy\,dx + x^2\,dy$.

۹. ب) $C'(10) = 30$، $\Delta C \approx 30$.

۱۰. الف) $\sin(0.02) \approx 0.02$.

۱۱. د) $dA/A = 2 \cdot dr/r = 4\%$.

۱۲. ب) $dy = 3\cos(3x)dx$.

۱۳. ج) $dS/S = 0.1dt$ = ۱۰٪.

۱۴. ب) $(1.01)^{20} \approx 1 + 20(0.01) = 1.2$.
۱۵. ب) $\Delta y = 0.41$، $dy = 0.4$ — $\Delta y > dy$.
۱۶. $dy = (5x^4 - 6x + 2)dx$.
۱۷. $f(25) = 5$، $f'(25) = 1/10$، $5 + 0.1(0.2) = 5.02$.
۱۸. $dV/V = 3 \cdot 0.5\% = 1.5\%$.
۱۹. $z_x = 3x^2 = 12$، $z_y = 2y = 6$. $dz = 12(0.1) + 6(0.2) = 2.4$.
۲۰. $\ln(1.1) \approx 0.1$.
۲۱. $P'(q) = -4q + 80$. $P'(20) = 0$. $\Delta P \approx 0$.
۲۲. $y = x^{-1}$، $dy = -x^{-2}dx = -dx/x^2$.
۲۳. $PV'(r) = -50000/(1+r)^{11}$. $PV'(0.05) \approx -50000/1.7103 \approx -29234$. $\Delta PV \approx -29234 \times 0.005 \approx -146.2$.

۱۱.۲۰ منابع پیشنهادی

- پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. فصل ۱۶.
- رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. فصل ۱۶.
- نیکوکار، م. (۱۳۹۷). *ریاضیات عمومی*. فصل ۱۶.
- T. S. Tan، (۲۰۱۹). *Applied Mathematics for Managerial، Social and Life Sci-ences*. Ch. ۱۲.
- A. S. Salzman، (۲۰۱۷). *Mathematics for Business*. Ch. ۱۱.
- E. Ummer، (۲۰۱۸). *Basic Mathematics for Economics and Finance*. Ch. ۱۳.

ایست بازرسی

پایان فصل ۱۶ — نسخه توسعه‌یافته
آمار: ∼۲۲ صفحه A۴ | ۲۰ مثال حل‌شده | ۲۳ سوال | ۶ منبع

xcolor enumitem booktabs geometry amsmath،amssymb،amsthm [۱۲pt،a۴paper]article
xepersian hyperref tcolorbox
margin=۲.۵cm
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)
فصل ۱۷: بهینه‌سازی (نسخه توسعه‌یافته) تیم ۵ نفره معمار آموزشی ۱۳ مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۲۱ فصل ۱۷: بهینه‌سازی (نسخه توسعه‌یافته – حجم دوبرابر)

۱.۲۱ چکیده

بهینه‌سازی، قلب تصمیم‌گیری مدیریتی است. هر مدیر هر روز با سوال «بهترین مقدار چقدر است؟» سر و کار دارد: بهترین قیمت، بهترین تولید، بهترین موجودی، بهترین تبلیغات. مشتق ابزار اصلی پاسخ به این سوال است. در نقطه بهینه، مشتق اول صفر است و مشتق دوم علامت ماکسیمم یا مینیمم را تعیین می‌کند. در این فصل، نقطه بحرانی، آزمون مشتق اول، آزمون مشتق دوم، تقعر و تحدب، نقطه عطف، ماکسیمم و مینیمم مطلق، بهینه‌سازی با محدودیت، بهینه‌سازی چندمتغیره، و کاربردهای گسترده مدیریتی را می‌آموزی. هدف نهایی: بتوانی هر مسئله بهینه‌سازی مدیریتی را با مشتق حل کنی و به بهترین تصمیم برسی.

۲.۲۱ اهداف یادگیری

- **تعریف کند:** نقطه بحرانی، ماکسیمم موضعی، مینیمم موضعی، ماکسیمم مطلق، مینیمم مطلق، تقعر، تحدب، نقطه عطف.
- **محاسبه کند:** نقاط بحرانی، آزمون مشتق اول و دوم، نقاط عطف.
- **تحلیل کند:** رفتار تابع در نقاط بحرانی، تعیین نوع بهینه.
- **به‌کار برد:** بهینه‌سازی سود، حداقل‌سازی هزینه، بهینه‌سازی موجودی.
- **مدل‌سازی کند:** مسائل بهینه‌سازی با محدودیت، بهینه‌سازی چندمتغیره.
- **ارزیابی کند:** مطلق یا موضعی بودن بهینه، شرط کافی مرتبه دوم.

۳.۲۱ مقدمه طنز

تصور کن یک مدیر کارخانه می‌خواهد بداند «چند واحد تولید کنم تا سود حداکثر شود؟» اگر بلد نباشد از بهینه‌سازی استفاده کند، ممکن است با آزمون و خطا، ماهها وقت بگذارد و در انتها هم به جواب بهینه نرسد. اما اگر مشتق بلد باشد، در چند ثانیه به جواب می‌رسد: مشتق تابع سود را صفر می‌گذارد و نقطه بهینه را پیدا می‌کند.

بهینه‌سازی مثل «پیدا کردن قله کوه در مه» است. اگر فقط با نگاه، دنبال قله بگردی، ممکن است ساعتها بگردی و به قله اشتباهی برسی. اما اگر از «قطب‌نما» (مشتق) استفاده کنی، در چند دقیقه به قله اصلی می‌رسی. مشتق به تو می‌گوید کجا شیب صفر است — و آن نقطه، همان قله است.

نکته طنزآمیز ماجرا اینجاست: بسیاری از مدیران فکر می‌کنند «سود همیشه با افزایش تولید زیاد می‌شود» و بی‌محابا تولید را افزایش می‌دهند. اما تابع سود معمولاً سهمی است: تا یک نقطه خاص زیاد می‌شود، بعد کم می‌شود. اگر مدیر نقطه بهینه را نداند، ممکن است با تولید بیش از حد، به‌جای سود بیشتر، ضرر کند. این فصل، تو را از «تصمیم‌گیری شهودی» به «تصمیم‌گیری بهینه» می‌برد.

۴.۲۱ مفاهیم اصلی

۱.۴.۲۱ مفهوم ۱: نقطه بحرانی

قضیه

نقطه $x = c$ یک «نقطه بحرانی» تابع f است اگر:

۱. $f'(c) = 0$، یا

۲. $f'(c)$ تعریف نشده باشد.

شهود: نقطه بحرانی، جایی است که «شیب صفر» است یا «شیب تعریف نشده». این نقاط، نامزدهای ماکسیمم یا مینیمم هستند.

نکته مهم: هر نقطه بحرانی، لزوماً بهینه نیست. باید بررسی کنیم.

مثال ساده: $f(x) = x^3 - 3x$. مشتق: $f'(x) = 3x^2 - 3$. حل $f'(x) = 0$:

$$3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

نقاط بحرانی: $x = 1$ و $x = -1$.

مثال مدیریتی: تابع سود $P(q) = -2q^2 + 40q - 100$. مشتق: $P'(q) = -4q + 40$. حل $P'(q) = 0$:

$$q = 10$$

نقطه بحرانی: $q = 10$.

۲.۴.۲۱ مفهوم ۲: ماکسیمم و مینیمم موضعی

تعریف ماکسیمم موضعی: تابع f در c ماکسیمم موضعی دارد اگر:

$$f(c) \geq f(x) \quad \text{برای همه } x \text{ در همسایگی } c$$

تعریف مینیمم موضعی: تابع f در c مینیمم موضعی دارد اگر:

$$f(c) \leq f(x) \quad \text{برای همه } x \text{ در همسایگی } c$$

شهود: ماکسیمم موضعی = «قله محلی»؛ مینیمم موضعی = «دره محلی».

مثال: $f(x) = x^3 - 3x$. در $x = -1$، ماکسیمم موضعی؛ در $x = 1$، مینیمم موضعی.

۳.۴.۲۱ مفهوم ۳: ماکسیمم و مینیمم مطلق

تعریف ماکسیمم مطلق: تابع f در c ماکسیمم مطلق روی مجموعه D دارد اگر:

$$f(c) \geq f(x) \quad \text{برای همه } x \in D$$

تعریف مینیمم مطلق: مشابه با $\leq$.

قضیه (EVT): اگر f روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، ماکسیمم و مینیمم مطلق وجود دارد.

روش یافتن بهینه مطلق روی $[a, b]$:

۱. نقاط بحرانی در (a, b) را بیاب.

۲. مقادیر f را در نقاط بحرانی و نقاط مرزی a و b حساب کن.

۳. بزرگ‌ترین = ماکسیمم مطلق؛ کوچک‌ترین = مینیمم مطلق.

مثال: $f(x) = x^3 - 3x$ روی $[-2, 3]$.

$$f(-2) = -8 + 6 = -2 \tag{۲۶۶}$$

$$f(-1) = -1 + 3 = 2 \quad \text{(ماکسیمم موضعی)} \tag{۲۶۷}$$

$$f(1) = 1 - 3 = -2 \quad \text{(مینیمم موضعی)} \tag{۲۶۸}$$

$$f(3) = 27 - 9 = 18 \quad \text{(ماکسیمم مطلق)} \tag{۲۶۹}$$

ماکسیمم مطلق: $f(3) = 18$؛ مینیمم مطلق: $f(-2) = f(1) = -2$.

۴.۴.۲۱ مفهوم ۴: آزمون مشتق اول

قضیه

اگر c نقطه بحرانی باشد:

- اگر f' از مثبت به منفی تغییر کند در c $\Rightarrow$ ماکسیمم موضعی.
- اگر f' از منفی به مثبت تغییر کند در c $\Rightarrow$ مینیمم موضعی.
- اگر f' علامت تغییر نکند $\Rightarrow$ نه ماکسیمم، نه مینیمم (نقطه زینی).

شهود: اگر شیب قبل از نقطه مثبت و بعد از آن منفی باشد، یعنی تابع بالا رفته و بعد پایین آمده — پس قله است.

مثال: $f(x) = x^3$. $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ برای همه x. $f'(0) = 0$ اما علامت تغییر نمی‌کند. پس $x = 0$ نه ماکسیمم است نه مینیمم.

مثال مدیریتی: $P(q) = -2q^2 + 40q - 100$. $P'(q) = -4q + 40$. برای $q < 10$: $P' > 0$؛ برای $q > 10$: $P' < 0$. پس $q = 10$ ماکسیمم است.

۵.۴.۲۱ مفهوم ۵: آزمون مشتق دوم

قضیه

اگر $f'(c) = 0$ و $f''(c)$ وجود داشته باشد:

- اگر $f''(c) < 0$ $\Rightarrow$ ماکسیمم موضعی.
- اگر $f''(c) > 0$ $\Rightarrow$ مینیمم موضعی.
- اگر $f''(c) = 0$ $\Rightarrow$ آزمون بی‌نتیجه (از مشتق اول استفاده کن).

شهود: مشتق دوم، «تقعر» را نشان می‌دهد. اگر تقعر رو به پایین باشد ($f'' < 0$)، تابع در آن نقطه قله دارد.

مثال: $f(x) = x^3 - 3x$. $f'(x) = 3x^2 - 3$، $f''(x) = 6x$.

$$f'(-1) = 0, \quad f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow \text{ماکسیمم} \tag{۲۷۰}$$

$$f'(1) = 0, \quad f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow \text{مینیمم} \tag{۲۷۱}$$

مثال مدیریتی: $P(q) = -2q^2 + 40q - 100$. $P'(q) = -4q + 40$، $P''(q) = -4 < 0$. پس $q = 10$ ماکسیمم است.

۶.۴.۲۱ مفهوم ۶: تقعر و تحدب

تعریف تقعر (Concave Down): تابع f در بازه‌ای مقعر است اگر $f'' < 0$.

تعریف تحدب (Concave Up): تابع f در بازه‌ای محدب است اگر $f'' > 0$.

شهود:

- **مقعر:** شکل «کاسه واژگون» (ناراحت).
- **محدب:** شکل «کاسه» (خندان).

مثال: $f(x) = x^3$. $f''(x) = 6x$.

- $x < 0 : f'' < 0 \Rightarrow$ مقعر.
- $x > 0 : f'' > 0 \Rightarrow$ محدب.

مثال مدیریتی: تابع سود معمولاً مقعر است ($P'' < 0$)، یعنی سود در نقطه بهینه، قله دارد.

۷.۴.۲۱ مفهوم ۷: نقطه عطف

تعریف: نقطه‌ای که تقعر تابع در آن تغییر می‌کند:

$$f''(c) = 0 \quad \text{و تقعر تغییر کند}$$

شهود: نقطه عطف، جایی است که تابع از «خندان» به «ناراحت» (یا برعکس) می‌رود.
مثال: $f(x) = x^3$. $f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$. چون تقعر تغییر می‌کند، نقطه عطف است.
مثال مدیریتی: در تابع تولید $Q(L) = 10L^2 - 0.1L^3$، نقطه عطف جایی است که «بازده نهایی افزایشی» به «بازده نهایی کاهشی» تبدیل می‌شود.

۸.۴.۲۱ مفهوم ۸: بهینه‌سازی سود

اصل: سود در نقطه‌ای ماکسیمم است که:

$$P'(q) = 0 \Rightarrow MR = MC$$

و:

$$P''(q) < 0$$

مثال: $R(q) = 100q - q^2$، $C(q) = 20q + 200$.

$$P(q) = R - C = -q^2 + 80q - 200 \tag{۲۷۲}$$
$$P'(q) = -2q + 80 = 0 \Rightarrow q = 40 \tag{۲۷۳}$$
$$P''(q) = -2 < 0 \Rightarrow \text{ماکسیمم} \tag{۲۷۴}$$
$$P(40) = -1600 + 3200 - 200 = 1400 \tag{۲۷۵}$$

۹.۴.۲۱ مفهوم ۹: حداقل‌سازی هزینه

اصل: هزینه متوسط در نقطه‌ای حداقل است که:

$$AC'(q) = 0 \Rightarrow MC = AC$$

مثال: $C(q) = q^2 + 100q + 10000$. هزینه متوسط:

$$AC(q) = \frac{C}{q} = q + 100 + \frac{10000}{q}$$

$$AC'(q) = 1 - \frac{10000}{q^2} = 0 \Rightarrow q^2 = 10000 \Rightarrow q = 100$$

$$AC(100) = 100 + 100 + 100 = 300$$

۱۰.۴.۲۱ مفهوم ۱۰: بهینه‌سازی درآمد

مثال: تقاضا $P = 200 - 4Q$. درآمد $R = PQ = 200Q - 4Q^2$.

$$R'(Q) = 200 - 8Q = 0 \Rightarrow Q = 25$$

$$R(25) = 200(25) - 4(625) = 5000 - 2500 = 2500$$

۱۱.۴.۲۱ مفهوم ۱۱: بهینه‌سازی موجودی (EOQ)

مدل EOQ: هزینه کل = هزینه سفارش + هزینه نگهداری:

$$TC(Q) = \frac{D}{Q}S + \frac{Q}{2}H$$

که D = تقاضای سالانه، S = هزینه هر سفارش، H = هزینه نگهداری هر واحد.

بهینه:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{H}}$$

مثال: $D = 10000$، $S = 100$، $H = 5$.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times 10000 \times 100}{5}} = \sqrt{400000} \approx 632.46$$

۱۲.۴.۲۱ مفهوم ۱۲: بهینه‌سازی با محدودیت

روش لاگرانژ: برای بهینه‌سازی $f(x, y)$ با محدودیت $g(x, y) = 0$:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

شرایط:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

مثال: حداکثر $f(x, y) = xy$ با محدودیت $x + y = 10$.

$$\mathcal{L} = xy - \lambda(x + y - 10)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y - \lambda = 0 \Rightarrow y = \lambda \tag{۲۷۶}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x - \lambda = 0 \Rightarrow x = \lambda \tag{۲۷۷}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x + y - 10 = 0 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5, y = 5 \tag{۲۷۸}$$

حداکثر $f = 25$.

۱۳.۴.۲۱ مفهوم ۱۳: بهینه‌سازی چندمتغیره

شرایط مرتبه اول:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

شرایط مرتبه دوم: با ماتریس هسیان:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

- $\det(H) > 0$ و $f_{xx} < 0$: ماکسیمم.

- $\det(H) > 0$ و $f_{xx} > 0$: مینیمم.
- $\det(H) < 0$: نقطه زینی.

مثال: $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 4x + 6y$.

$$f_x = -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad (۲۷۹)$$
$$f_y = -2y + 6 = 0 \Rightarrow y = 3 \quad (۲۸۰)$$
$$f_{xx} = -2, \quad f_{yy} = -2, \quad f_{xy} = 0 \quad (۲۸۱)$$
$$\det(H) = 4 > 0, \quad f_{xx} < 0 \Rightarrow \text{ماکسیمم} \quad (۲۸۲)$$

حداکثر $f(2,3) = -4 - 9 + 8 + 18 = 13$.

۱۴.۴.۲۱ مفهوم ۱۴: کشش و بهینه‌سازی

رابطه: درآمد در نقطه بهینه، وقتی کشش واحد باشد:

$$E_d = -1 \Rightarrow MR = 0$$

مثال: $Q = 100 - 2P$. $MR = 100 - 4Q$... در $MR = 0$: $Q = 25$، $P = 37.5$.

۱۵.۴.۲۱ مفهوم ۱۵: جمع‌بندی روش بهینه‌سازی

مراحل حل مسئله بهینه‌سازی:

۱. تابع هدف را بنویس.

۲. محدودیت‌ها را مشخص کن.

۳. مشتق اول را صفر کن (نقاط بحرانی).

۴. با مشتق دوم یا مشتق اول، نوع بهینه را تعیین کن.

۵. مقدار بهینه را حساب کن.

۶. تفسیر مدیریتی کن.

۵.۲۱ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: ماکسیمم ساده
صورت مسئله: $f(x) = -x^2 + 6x + 5$. ماکسیمم.
مرحله ۱: $f'(x) = -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$.
مرحله ۲: $f''(x) = -2 < 0$ ⟵ ماکسیمم.
مرحله ۳: $f(3) = -9 + 18 + 5 = 14$.
نتیجه: ماکسیمم ۱۴ در $x = 3$.

مثال حل‌شده

مثال ۲: مینیمم

صورت مسئله: $f(x) = x^2 - 8x + 20$.

مرحله ۱: $f'(x) = 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4$.

مرحله ۲: $f''(x) = 2 > 0$ ⟵ مینیمم.

مرحله ۳: $f(4) = 16 - 32 + 20 = 4$.

نتیجه: مینیمم ۴ در $x = 4$.

مثال حل‌شده

مثال ۳: ماکسیمم سود

صورت مسئله: $R(q) = 80q - 2q^2$، $C(q) = 10q + 100$.

مرحله ۱: $P(q) = -2q^2 + 70q - 100$.

مرحله ۲: $P'(q) = -4q + 70 = 0 \Rightarrow q = 17.5$.

مرحله ۳: $P''(q) = -4 < 0$ ⟵ ماکسیمم.

مرحله ۴: $P(17.5) = -612.5 + 1225 - 100 = 512.5$.

نتیجه: حداکثر سود ۵.۵۱۲ در $q = 17.5$.

مثال حل‌شده

مثال ۴: حداقل هزینه متوسط

صورت مسئله: $C(q) = 0.5q^2 + 50q + 5000$.

مرحله ۱: $AC(q) = 0.5q + 50 + 5000/q$.

مرحله ۲: $AC'(q) = 0.5 - 5000/q^2 = 0 \Rightarrow q^2 = 10000 \Rightarrow q = 100$.

مرحله ۳: $AC(100) = 50 + 50 + 50 = 150$.

نتیجه: حداقل هزینه متوسط ۱۵۰ در $q = 100$.

مثال حل‌شده

مثال ۵: بهینه‌سازی درآمد

صورت مسئله: تقاضا $P = 300 - 3Q$.

مرحله ۱: $R = PQ = 300Q - 3Q^2$.

مرحله ۲: $R' = 300 - 6Q = 0 \Rightarrow Q = 50$.

مرحله ۳: $R(50) = 15000 - 7500 = 7500$.

نتیجه: حداکثر درآمد ۷۵۰۰ در $Q = 50$.

مثال حل‌شده

مثال ۶: EOQ

صورت مسئله: $D = 20000$، $S = 50$، $H = 4$.

مرحله ۱: $Q^* = \sqrt{2 \times 20000 \times 50/4}$.

مرحله ۲: $Q^* = \sqrt{500000} \approx 707.1$.

نتیجه: اندازه سفارش بهینه ≈ 707.

مثال حل‌شده

مثال ۷: لاگرانژ
صورت مسئله: حداکثر $f = x^2y$ با $x + y = 6$.
مرحله ۱: $\mathcal{L} = x^2y - \lambda(x + y - 6)$.
مرحله ۲: $2xy = \lambda$، $x^2 = \lambda$، $x + y = 6$.
مرحله ۳: $2xy = x^2 \Rightarrow 2y = x$.
مرحله ۴: $2y + y = 6 \Rightarrow y = 2$، $x = 4$.
مرحله ۵: $f = 16 \times 2 = 32$.
نتیجه: حداکثر ۳۲.

مثال حل‌شده

مثال ۸: بهینه‌سازی چندمتغیره
صورت مسئله: $f(x, y) = 10x + 20y - x^2 - y^2$.
مرحله ۱: $f_x = 10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5$.
مرحله ۲: $f_y = 20 - 2y = 0 \Rightarrow y = 10$.
مرحله ۳: $f_{xx} = -2 < 0$، $\det(H) = 4 > 0$ ⟵ ماکسیمم.
مرحله ۴: $f(5, 10) = 50 + 200 - 25 - 100 = 125$.
نتیجه: ماکسیمم ۱۲۵.

مثال حل‌شده

مثال ۹: نقطه عطف
صورت مسئله: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.
مرحله ۱: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.
مرحله ۲: $f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$.
مرحله ۳: تقعر تغییر می‌کند ⟵ نقطه عطف.
نتیجه: نقطه عطف در $x = 2$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۰: بهینه مطلق
صورت مسئله: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ روی $[0, 4]$.
مرحله ۱: $f' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$.
مرحله ۲: $f(0) = 4$، $f(2) = 0$، $f(4) = 64 - 48 + 4 = 20$.
نتیجه: ماکسیمم مطلق ۲۰ در $x = 4$؛ مینیمم مطلق ۰ در $x = 2$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۱: سود با تقاضای خطی
صورت مسئله: $P = 500 - 5Q$، $C = 50Q + 1000$.
مرحله ۱: $R = 500Q - 5Q^2$.
مرحله ۲: $P(q) = -5Q^2 + 450Q - 1000$.
مرحله ۳: $P' = -10Q + 450 = 0 \Rightarrow Q = 45$.
مرحله ۴: $P = 500 - 225 = 275$.
مرحله ۵: $P(45) = -10125 + 20250 - 1000 = 9125$.
نتیجه: $Q = 45$، $P = 275$، سود 9125.

مثال حل‌شده

مثال ۱۲: بهینه‌سازی تبلیغات
صورت مسئله: فروش $S(x) = 1000 + 50x - x^2$ که x هزینه تبلیغات. حداکثر فروش.
مرحله ۱: $S' = 50 - 2x = 0 \Rightarrow x = 25$.
مرحله ۲: $S(25) = 1000 + 1250 - 625 = 1625$.
نتیجه: حداکثر فروش ۱۶۲۵ با هزینه ۲۵.

مثال حل‌شده

مثال ۱۳: حداقل هزینه
صورت مسئله: $C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 100$.
مرحله ۱: $C'(q) = 3q^2 - 24q + 60 = 0$.
مرحله ۲: $q^2 - 8q + 20 = 0$، $\Delta = 64 - 80 < 0$ — نقطه بحرانی ندارد.
مرحله ۳: همیشه $C' > 0$ — تابع صعودی.
نتیجه: مینیمم در $q = 0$: $C(0) = 100$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۴: بهینه‌سازی با محدودیت بودجه
صورت مسئله: حداکثر $U = xy$ با $2x + y = 20$.
مرحله ۱: $\mathcal{L} = xy - \lambda(2x + y - 20)$.
مرحله ۲: $y = 2\lambda$، $x = \lambda$.
مرحله ۳: $2(2\lambda) + \lambda = 20 \Rightarrow 5\lambda = 20 \Rightarrow \lambda = 4$.
مرحله ۴: $x = 4$، $y = 8$.
مرحله ۵: $U = 32$.
نتیجه: حداکثر ۳۲.

مثال حل‌شده

مثال ۱۵: سه‌متغیره
صورت مسئله: $f = x + 2y + 3z$ با $x + y + z = 10$.
مرحله ۱: همه ضرایب مثبت — حداکثر روی مرز.
مرحله ۲: $z = 10$، $x = y = 0$: $f = 30$.
نتیجه: حداکثر ۳۰.

مثال حل‌شده

مثال ۱۶: بهینه‌سازی با دو متغیر
صورت مسئله: $f(x,y) = -x^2 - 2y^2 + 4x + 8y$.
مرحله ۱: $f_x = -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.
مرحله ۲: $f_y = -4y + 8 = 0 \Rightarrow y = 2$.
مرحله ۳: $f_{xx} = -2 < 0$، $f_{yy} = -4 < 0$، $\det = 8 > 0$ ⟵ ماکسیمم.
مرحله ۴: $f(2,2) = -4 - 8 + 8 + 16 = 12$.
نتیجه: ماکسیمم ۱۲.

مثال حل‌شده

مثال ۱۷: نقطه زینی
صورت مسئله: $f(x,y) = x^2 - y^2$.
مرحله ۱: $f_x = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$.
مرحله ۲: $f_y = -2y = 0 \Rightarrow y = 0$.
مرحله ۳: $f_{xx} = 2$، $f_{yy} = -2$، $\det = -4 < 0$ ⟵ نقطه زینی.
نتیجه: $(0,0)$ نقطه زینی.

مثال حل‌شده

مثال ۱۸: بهینه‌سازی با مالیات
صورت مسئله: سود شرکت $P(q) = -q^2 + 100q - 500$. مالیات ٪۱۰ بر سود. حداکثر سود پس از مالیات.
مرحله ۱: سود پس از مالیات: $0.9P(q)$.
مرحله ۲: مشتق: $0.9P'(q) = 0 \Rightarrow P'(q) = 0 \Rightarrow q = 50$.
مرحله ۳: $P(50) = -2500 + 5000 - 500 = 2000$.
مرحله ۴: پس از مالیات: $0.9 \times 2000 = 1800$.
نتیجه: $q = 50$، سود پس از مالیات ۱۸۰۰.

مثال حل‌شده

مثال ۱۹: بهینه‌سازی بهره
صورت مسئله: $A(r) = 1000(1+r)^{10}$ روی $[0.02, 0.10]$. حداکثر و مینیمم.
مرحله ۱: $A'(r) = 10000(1+r)^9 > 0$ ⟵ صعودی.
مرحله ۲: مینیمم در $r = 0.02$: $A = 1000(1.02)^{10} \approx 1219$.
مرحله ۳: ماکسیمم در $r = 0.10$: $A = 1000(1.1)^{10} \approx 2593.7$.
نتیجه: مینیمم ۱۲۱۹، ماکسیمم ۲۵۹۴.

مثال حل‌شده

مثال ۲۰: بهینه‌سازی ترکیبی
صورت مسئله: تابع سود $P(x,y) = 20x + 30y - x^2 - 2y^2 - xy$. حداکثر.
مرحله ۱: $P_x = 20 - 2x - y = 0$.
مرحله ۲: $P_y = 30 - 4y - x = 0$.
مرحله ۳: از معادله اول: $y = 20 - 2x$. جای‌گذاری: $30 - 4(20 - 2x) - x = 0 \Rightarrow 30 - 80 + 8x - x = 0 \Rightarrow 7x = 50 \Rightarrow x = 7.14$.
مرحله ۴: $y = 20 - 14.28 = 5.72$.
مرحله ۵: $P \approx 20(7.14) + 30(5.72) - 51 - 65.4 - 40.8 \approx 142.8 + 171.6 - 157.2 = 157.2$.
نتیجه: حداکثر ≈ 157.2.

۶.۲۱ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه ۱: فرض ماکسیمم بودن هر نقطه بحرانی.
راه پیشگیری: با مشتق دوم یا اول، نوع را تعیین کن.
اشتباه ۲: فراموش کردن آزمون مشتق دوم.
راه پیشگیری: همیشه $f''(c)$ را حساب کن.
اشتباه ۳: اشتباه بین ماکسیمم و مینیمم.
راه پیشگیری: $f'' < 0$: ماکسیمم؛ $f'' > 0$: مینیمم.
اشتباه ۴: فراموش کردن مرزها در بهینه مطلق.
راه پیشگیری: مقادیر مرزی را هم حساب کن.
اشتباه ۵: اشتباه در ماتریس هسیان.
راه پیشگیری: $f_{xx} < 0$ و $\det(H) > 0$: ماکسیمم.
اشتباه ۶: فراموش کردن محدودیت در لاگرانژ.
راه پیشگیری: $\partial \mathcal{L}/\partial \lambda = 0$ را هم بنویس.
اشتباه ۷: اشتباه در تفسیر نقطه عطف.
راه پیشگیری: تقعر باید تغییر کند، نه فقط $f'' = 0$.

۷.۲۱ کاربرد در مدیریت

کاربرد مدیریتی

کاربرد ۱: حداکثر سود
$MR = MC$ — تعیین تولید بهینه.
کاربرد ۲: حداقل هزینه
$MC = AC$ — تعیین مقیاس بهینه.
کاربرد ۳: حداکثر درآمد
$MR = 0$ — قیمت‌گذاری بهینه.
کاربرد ۴: EOQ
$Q^* = \sqrt{2DS/H}$ — مدیریت موجودی.
کاربرد ۵: بهینه‌سازی تبلیغات
حداکثر فروش با هزینه تبلیغات.
کاربرد ۶: قیمت‌گذاری
تعیین قیمت بهینه با تابع تقاضا.
کاربرد ۷: بهینه‌سازی ترکیب محصول
حداکثر سود با محدودیت منابع.
کاربرد ۸: حداقل‌سازی ریسک
با محدودیت بازده.
کاربرد ۹: بهینه‌سازی مالی
حداکثر ارزش فعلی خالص (NPV).
کاربرد ۱۰: بهینه‌سازی نیروی کار
$MP_L = W/P$ — استخدام بهینه.

۸.۲۱ خلاصه فصل

مفهوم	شرط	کاربرد
نقطه بحرانی	$f'(c) = 0$	نامزد بهینه
ماکسیمم	$f''(c) < 0$	حداکثر سود
مینیمم	$f''(c) > 0$	حداقل هزینه
نقطه عطف	$f''(c) = 0$	تغییر تقعر
ماکسیمم سود	$MR = MC$	تولید بهینه
حداقل هزینه متوسط	$MC = AC$	مقیاس بهینه
EOQ	$Q^* = \sqrt{2DS/H}$	موجودی
لاگرانژ	$\nabla f = \lambda \nabla g$	با محدودیت
هسیان	$\det(H) > 0$	چندمتغیره

۹.۲۱ خودآزمایی

۱.۹.۲۱ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. ماکسیمم $f(x) = -x^2 + 4x$:

آ) $x = 1$

ب) $x = 2$

ج) $x = 3$

د) $x = 4$

۲. مینیمم $f(x) = x^2 - 6x + 5$:

آ) $x = 2$

ب) $x = 3$

ج) $x = 4$

د) $x = 5$

۳. اگر $f''(c) > 0$:

آ) ماکسیمم

ب) مینیمم

ج) نقطه عطف

د) نامشخص

۴. حداکثر سود $P(q) = -q^2 + 20q - 50$:

آ) ۵۰

ب) ۱۰۰

ج) ۱۵۰

د) ۲۰۰

۵. حداقل $f(x) = x^2 + 4x + 10$:

آ) ۲

ب) ۴

ج) ۶

د) ۸

۶. $R = 100Q - Q^2$. حداکثر درآمد:

آ) ۲۵۰۰

ب) ۵۰۰۰

ج) ۷۵۰۰

د) ۱۰۰۰۰

۷. EOQ با $D = 1000$، $S = 40$، $H = 2$:

آ) ۱۰۰

ب) ۲۰۰

ج) ۳۰۰

د) ۴۰۰

۸. اگر $f'(c) = 0$ و $f''(c) = 0$:

آ) ماکسیمم

ب) مینیمم

ج) نقطه عطف یا زینی

د) نامشخص

۹. حداکثر $f(x, y) = xy$ با $x + y = 8$:

آ) ۱۲

ب) ۱۶

ج) ۲۰

د) ۲۴

۱۰. در نقطه بهینه درآمد، MR:

آ) مثبت

ب) منفی

ج) صفر

د) نامشخص

۱۱. $AC(q) = q + 100/q$. حداقل AC:

آ) ۵

ب) ۱۰

ج) ۱۵

د) ۲۰

۱۲. اگر $\det(H) < 0$:

آ) ماکسیمم

ب) مینیمم

ج) نقطه زینی

د) نقطه عطف

۱۳. ماکسیمم $f(x) = -2x^2 + 12x - 5$:

آ) ۱۰

ب) ۱۳

ج) ۱۶

د) ۲۰

۱۴. تابع تولید $Q(L) = 20L - L^2$. حداکثر تولید:

آ) ۵۰

ب) ۱۰۰

ج) ۱۵۰

د) ۲۰۰

۱۵. در بهینه‌سازی با محدودیت، تعداد معادلات:

آ) فقط مشتق‌ها

ب) مشتق‌ها + محدودیت

ج) فقط محدودیت

د) هیچ‌کدام

۲.۹.۲۱ تشریحی (۸ سوال)

۱۶. ماکسیمم $f(x) = -3x^2 + 18x - 10$.
۱۷. حداکثر سود $R(q) = 100q - 2q^2$، $C(q) = 20q + 50$.
۱۸. حداقل $AC(q) = 0.1q + 1000/q$.
۱۹. EOQ با $D = 5000$، $S = 80$، $H = 2$.
۲۰. حداکثر $f(x, y) = xy$ با $2x + y = 12$.
۲۱. ماکسیمم $f(x, y) = -2x^2 - 3y^2 + 16x + 18y$.
۲۲. حداکثر درآمد $P = 200 - 2Q$.
۲۳. نقاط بحرانی $f(x) = x^3 - 12x + 5$ و نوع آن‌ها.

۱۰.۲۱ پاسخنامه تشریحی

۱. ب) $f' = -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.
۲. ب) $f' = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$.
۳. ب) $f'' > 0$ ⟵ مینیمم.
۴. الف) $q = 10$، $P(10) = 50$.
۵. ج) $x = -2$، $f(-2) = 6$.
۶. الف) $Q = 50$، $R = 2500$.
۷. ب) $\sqrt{2 \times 1000 \times 40/2} = \sqrt{40000} = 200$.
۸. ج) آزمون دوم بی‌نتیجه.
۹. ب) $x = y = 4$، $f = 16$.
۱۰. ج) $MR = 0$.

۱۱. ب) $q^2 = 100 \Rightarrow q = 10$، $AC = 20$.
۱۲. ج) نقطه زینی.
۱۳. ب) $x = 3$، $f = 13$.
۱۴. ب) $L = 10$، $Q = 100$.
۱۵. ب) مشتق‌ها + محدودیت.
۱۶. $f' = -6x + 18 = 0 \Rightarrow x = 3$. $f'' = -6 < 0$. $f(3) = -27 + 54 - 10 = 17$.
۱۷. $P = -2q^2 + 80q - 50$. $q = 20$. $P(20) = -800 + 1600 - 50 = 750$.
۱۸. $AC' = 0.1 - 1000/q^2 = 0 \Rightarrow q^2 = 10000 \Rightarrow q = 100$. $AC = 10 + 10 = 20$.
۱۹. $Q^* = \sqrt{2 \times 5000 \times 80/2} = \sqrt{400000} \approx 632.46$.
۲۰. $\mathcal{L} = xy - \lambda(2x + y - 12)$. $x = \lambda$، $y = 2\lambda$. $2\lambda + 2\lambda = 12 \Rightarrow \lambda = 3$. $x = 3$، $y = 6$. $f = 18$.
۲۱. $f_x = -4x + 16 = 0 \Rightarrow x = 4$. $f_y = -6y + 18 = 0 \Rightarrow y = 3$. $f(4,3) = -32 - 27 + 64 + 54 = 59$.
۲۲. $R = 200Q - 2Q^2$. $Q = 50$. $R = 5000$. $P = 100$.
۲۳. $f' = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$. $f'' = 6x$. $f''(-2) = -12 < 0$ ماکسیمم؛ $f''(2) = 12 > 0$ مینیمم.

۱۱.۲۱ منابع پیشنهادی

- پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. فصل ۱۷.
- رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. فصل ۱۷.
- نیکوکار، م. (۱۳۹۷). *ریاضیات عمومی*. فصل ۱۷.
- T. S. Tan، (۲۰۱۹). *Applied Mathematics for Managerial، Social and Life Sciences*. Ch. ۱۳.
- A. S. Salzman، (۲۰۱۷). *Mathematics for Business*. Ch. ۱۲.
- E. Ummer، (۲۰۱۸). *Basic Mathematics for Economics and Finance*. Ch. ۱۴.

ایست بازرسی

پایان فصل ۱۷ — نسخه توسعه‌یافته
آمار: ∼۲۴ صفحه A۴ | ۲۰ مثال حل‌شده | ۲۳ سوال | ۶ منبع

xcolor enumitem booktabs geometry amsmath،amssymb،amsthm [۱۲pt،a۴paper]article
xepersian hyperref tcolorbox
margin=۲.۵cm
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)
فصل ۱۸ : بهره و بهره مرکب (نسخه توسعه‌یافته) تیم ۵ نفره معمار آموزشی ۱۳ مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۲۲ فصل ۱۸: بهره و بهره مرکب (نسخه توسعه‌یافته – حجم دوبرابر)

۱.۲۲ چکیده

بهره، «اجاره پول» است. وقتی پولی قرض می‌دهی یا سرمایه‌گذاری می‌کنی، در ازای گذشت زمان، مبلغی اضافه دریافت می‌کنی که همان بهره است. در مدیریت مالی، درک دقیق بهره ساده، بهره مرکب، بهره پیوسته، نرخ مؤثر سالانه، و ارزش زمانی پول، پایه‌ای برای تمام تصمیم‌های سرمایه‌گذاری و تأمین مالی است. در این فصل، بهره ساده، بهره مرکب، بهره مرکب با مرکب‌سازی مختلف، بهره پیوسته، نرخ مؤثر سالانه، نرخ اسمی، تنزیل، ارزش فعلی، و کاربردهای گسترده مدیریتی را می‌آموزی. هدف نهایی: بتوانی هر مسئله مالی مربوط به بهره را حل کنی و بهترین گزینه سرمایه‌گذاری یا تأمین مالی را انتخاب کنی.

۲.۲۲ اهداف یادگیری

- **تعریف کند:** بهره، اصل، نرخ بهره، بهره ساده، بهره مرکب، بهره پیوسته، نرخ اسمی، نرخ مؤثر، تنزیل، ارزش فعلی.
- **محاسبه کند:** بهره ساده، بهره مرکب، ارزش آینده، ارزش فعلی، نرخ مؤثر سالانه.
- **تحلیل کند:** تفاوت بهره ساده و مرکب، اثر تعداد مرکب‌سازی، اثر زمان.
- **به‌کار برد:** فرمول‌های بهره برای تصمیم‌گیری مالی.
- **مدل‌سازی کند:** سرمایه‌گذاری، وام، پس‌انداز، ارزیابی پروژه.
- **ارزیابی کند:** کدام گزینه سرمایه‌گذاری یا تأمین مالی بهتر است.

۳.۲۲ مقدمه طنز

تصور کن دو دوست، علی و رضا، هر کدام ۱۰۰ میلیون تومان سرمایه‌گذاری می‌کنند. علی با نرخ بهره ساده ٪۲۰ و رضا با نرخ بهره مرکب ٪۲۰. بعد از ۳۰ سال، علی ۷۰۰ میلیون دارد (چون هر سال ۲۰ میلیون بهره می‌گیرد و اصل ثابت می‌ماند). اما رضا:

$$100 \times (1.2)^{30} \approx 23{,}737 \text{ میلیون تومان}$$

یعنی حدود ۷.۲۳ میلیارد تومان! این تفاوت ۲۳ میلیاردی، همان «معجزه بهره مرکب» است.

بهره ساده مثل «دویدن روی تردمیل» است: هر چقدر هم بدوی، در همان نقطه می‌مانی و فقط یک مقدار ثابت اضافه می‌شود. بهره مرکب مثل «دویدن روی پله برقی رو به بالا» است: هر قدم، تو را بالاتر می‌برد و قدم بعدی، از ارتفاع بالاتر شروع می‌شود.

نکته طنزآمیز ماجرا اینجاست: بسیاری از افراد فکر می‌کنند «بهره ساده و مرکب تفاوت چندانی ندارند» و از این تفاوت غافل می‌شوند. اما در بلندمدت، این تفاوت می‌تواند بین «یک زندگی معمولی» و «یک امپراتوری مالی» فاصله بیندازد. آلبرت انیشتین گفته: «بهره مرکب، هشتمین عجایب جهان است. کسی که آن را می‌فهمد، درآمد کسب می‌کند؛ کسی که نمی‌فهمد، هزینه می‌پردازد.» این فصل، تو را از «گروه دوم» به «گروه اول» می‌برد.

۴.۲۲ مفاهیم اصلی

۱.۴.۲۲ مفهوم ۱: تعریف بهره و اصطلاحات پایه

تعریف بهره: بهره (Interest)، مبلغی است که در ازای استفاده از پول دیگری، در مدت زمان مشخص پرداخت می‌شود.

اصطلاحات پایه:

- **اصل (Principal):** مبلغ اولیه سرمایه‌گذاری یا وام، نماد P.
- **نرخ بهره (Interest Rate):** درصد بهره در واحد زمان، نماد r (معمولاً سالانه).
- **زمان (Time):** مدت سرمایه‌گذاری، نماد t (معمولاً سال).
- **بهره:** مبلغ بهره، نماد I.
- **ارزش آینده (Future Value):** اصل + بهره، نماد A یا FV.
- **ارزش فعلی (Present Value):** ارزش امروز یک مبلغ آتی، نماد PV.

رابطه پایه:

$$I = P \cdot r \cdot t$$

مثال ساده: ۱۰۰ میلیون با نرخ ٪۱۰ ساده برای ۳ سال:

$$I = 100 \times 0.10 \times 3 = 30 \text{میلیون}$$

۲.۴.۲۲ مفهوم ۲: بهره ساده (Simple Interest)

قضیه

فرمول بهره ساده:

$$I = P \cdot r \cdot t$$

ارزش آینده:

$$A = P + I = P(1 + rt)$$

شهود: بهره فقط بر اساس اصل اولیه محاسبه می‌شود و بهره‌های قبلی، بهره جدید تولید نمی‌کنند.
مثال ساده: ۵۰ میلیون با نرخ ٪۸ ساده برای ۵ سال:

$$I = 50 \times 0.08 \times 5 = 20 \text{میلیون} \quad (۲۸۳)$$

$$A = 50 + 20 = 70 \text{میلیون} \quad (۲۸۴)$$

مثال مدیریتی: یک شرکت وامی به مبلغ ۵۰۰ میلیون با نرخ ٪۱۲ ساده برای ۲ سال می‌گیرد:

$$I = 500 \times 0.12 \times 2 = 120 \text{میلیون} \quad (۲۸۵)$$

$$A = 500 + 120 = 620 \text{میلیون} \quad (۲۸۶)$$

کاربرد بهره ساده: وام‌های کوتاه‌مدت، اوراق قرضه بدون کوپن، محاسبات ساده.

۳.۴.۲۲ مفهوم ۳: بهره مرکب (Compound Interest)

قضیه

فرمول بهره مرکب:

$$A = P(1 + r)^t$$

بهره:

$$I = A - P = P[(1 + r)^t - 1]$$

شهود: هر دوره، بهره به اصل اضافه می‌شود و در دوره بعد، بهره روی بهره هم حساب می‌شود.
تفاوت با ساده: در بهره مرکب، «سود روی سود» می‌نشیند.
مثال ساده: ۱۰۰ میلیون با نرخ ٪۱۰ مرکب برای ۳ سال:

$$A = 100(1.10)^3 = 100 \times 1.331 = 133.1 \text{میلیون} \quad (۲۸۷)$$

$$I = 33.1 \text{میلیون} \quad (۲۸۸)$$

در حالی که در بهره ساده، $I = 30$ میلیون بود. تفاوت ۱.۳ میلیون.
مثال مدیریتی: صندوق بازنشستگی با ٪۱۵ مرکب سالانه. اگر ۲۰۰ میلیون سرمایه‌گذاری شود، بعد از ۲۰ سال:

$$A = 200(1.15)^{20} = 200 \times 16.3665 \approx 3273.3 \text{میلیون} \quad (۲۸۹)$$

یعنی حدود ۳.۳ میلیارد تومان!
مقایسه ساده و مرکب در بلندمدت:

سال	ساده (٪۱۰)	مرکب (٪۱۰)	تفاوت
۵	۱۵۰	۰۵.۱۶۱	۰۵.۱۱
۱۰	۲۰۰	۳۷.۲۵۹	۳۷.۵۹
۲۰	۳۰۰	۷۵.۶۷۲	۷۵.۳۷۲
۳۰	۴۰۰	۹۴.۱۷۴۴	۹۴.۱۳۴۴
۵۰	۶۰۰	۰۸.۱۱۷۳۹	۰۸.۱۱۱۳۹

۴.۴.۲۲ مفهوم ۴: بهره مرکب با مرکب‌سازی چندبار در سال

قضیه

اگر مرکب‌سازی n بار در سال انجام شود:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

شهود: هرچه تعداد مرکب‌سازی بیشتر، بهره بیشتر (چون سریع‌تر بهره روی بهره می‌نشیند).
حالات خاص:

- سالانه: $n = 1$
- شش‌ماهه: $n = 2$
- فصلی: $n = 4$
- ماهانه: $n = 12$
- روزانه: $n = 365$

مثال: ۱۰۰ میلیون با نرخ ٪۱۲ برای ۲ سال:

$$\text{سالانه: } A = 100(1.12)^2 = 125.44 \quad (۲۹۰)$$

$$\text{شش‌ماهه: } A = 100(1.06)^4 = 126.25 \quad (۲۹۱)$$

$$\text{فصلی: } A = 100(1.03)^8 = 126.68 \quad (۲۹۲)$$

$$\text{ماهانه: } A = 100(1.01)^{24} = 126.97 \quad (۲۹۳)$$

$$\text{روزانه: } A = 100(1 + 0.12/365)^{730} \approx 127.12 \quad (۲۹۴)$$

نتیجه: هرچه تعداد مرکب‌سازی بیشتر، ارزش آینده بیشتر (اما با نرخ کاهشی).

۵.۴.۲۲ مفهوم ۵: بهره پیوسته (Continuous Compounding)

قضیه

وقتی تعداد مرکب‌سازی به بی‌نهایت میل کند:

$$A = Pe^{rt}$$

که $e \approx 2.71828$ است.

اثبات با حد:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = Pe^{rt}$$

مثال: ۱۰۰ میلیون با نرخ ٪۱۲ پیوسته برای ۲ سال:

$$A = 100e^{0.24} \approx 100 \times 1.2712 = 127.12 \text{میلیون}$$

نکته: بهره پیوسته، «حد نهایی» بهره مرکب است.
مثال مدیریتی: مدل‌سازی رشد سرمایه در بازارهای مالی پیچیده از بهره پیوسته استفاده می‌کند.

۶.۴.۲۲ مفهوم ۶: نرخ مؤثر سالانه (EAR)

قضیه

نرخ مؤثر سالانه:

$$EAR = \left(1+\frac{r}{n}\right)^{n} - 1$$

برای بهره پیوسته:

$$EAR = e^{r} - 1$$

شهود: نرخ مؤثر، «نرخ واقعی» رشد در یک سال است، با در نظر گرفتن اثر مرکب‌سازی.
مثال: نرخ اسمی ٪۱۲ با مرکب‌سازی ماهانه:

$$EAR = (1.01)^{12} - 1 \approx 0.1268 = 12.68\%$$

مقایسه نرخ مؤثر برای نرخ اسمی ٪۱۲:

مرکب‌سازی	EAR
سالانه	۱۲.۰۰٪
شش‌ماهه	۱۲.۳۶٪
فصلی	۱۲.۵۵٪
ماهانه	۱۲.۶۸٪
روزانه	۱۲.۷۴٪
پیوسته	۱۲.۷۵٪

نکته مهم: وقتی بانک‌ها نرخ اسمی اعلام می‌کنند، همیشه نرخ مؤثر را هم بپرسید!

۷.۴.۲۲ مفهوم ۷: نرخ اسمی از نرخ مؤثر

فرمول:

$$r = n\left[(1 + EAR)^{1/n} - 1\right]$$

مثال: اگر EAR = ۱۵٪ و مرکب‌سازی فصلی:

$$r = 4[(1.15)^{0.25} - 1] \approx 4 \times 0.0356 = 0.1424 = 14.24\%$$

۸.۴.۲۲ مفهوم ۸: ارزش فعلی (Present Value)

قضیه

ارزش فعلی با بهره مرکب:

$$PV = \frac{FV}{(1 + r)^t}$$

با مرکب‌سازی n بار:

$$PV = \frac{FV}{(1 + r/n)^{nt}}$$

با بهره پیوسته:

$$PV = FV \cdot e^{-rt}$$

شهود: ارزش فعلی، «مبلغی است که امروز باید سرمایه‌گذاری کنی تا در آینده به FV برسی».
مثال: می‌خواهی بعد از ۵ سال ۲۰۰ میلیون داشته باشی، نرخ ۱۰٪:

$$PV = \frac{200}{(1.10)^5} = \frac{200}{1.6105} \approx 124.18 \text{میلیون}$$

مثال مدیریتی: یک پروژه ۵۰۰ میلیون در ۱۰ سال آینده بازده دارد، نرخ ۱۵٪. ارزش فعلی:

$$PV = \frac{500}{(1.15)^{10}} \approx \frac{500}{4.0456} \approx 123.6 \text{میلیون}$$

یعنی اگر هزینه اجرای پروژه کمتر از ۶.۱۲۳ میلیون باشد، صرفه دارد.

۹.۴.۲۲ مفهوم ۹: تنزیل (Discounting)

تعریف: فرآیند محاسبه ارزش فعلی از ارزش آینده، «تنزیل» نامیده می‌شود.
عامل تنزیل:

$$DF = \frac{1}{(1 + r)^t}$$

مثال: عامل تنزیل برای ۵ سال با نرخ ۸٪:

$$DF = \frac{1}{(1.08)^5} \approx 0.6806$$

۱۰.۴.۲۲ مفهوم ۱۰: قاعده ۷۲

تعریف: زمان تقریبی دوبرابر شدن سرمایه:

$$t_{2\times} \approx \frac{72}{r \times 100}$$

مثال: نرخ ٪۸: $t \approx 72/8 = 9$ سال.
مثال دقیق: با نرخ ٪۸:

$$t = \frac{\ln 2}{\ln 1.08} \approx \frac{0.6931}{0.0770} \approx 9.01 \text{سال}$$

۱۱.۴.۲۲ مفهوم ۱۱: قاعده ۶۹

تعریف دقیق‌تر برای بهره پیوسته:

$$t_{2\times} = \frac{\ln 2}{r} \approx \frac{0.693}{r}$$

۱۲.۴.۲۲ مفهوم ۱۲: بهره و تورم

نرخ بهره واقعی (Real Rate):

$$(1 + r_{real}) = \frac{1 + r_{nominal}}{1 + \pi}$$

یا تقریباً:

$$r_{real} \approx r_{nominal} - \pi$$

که π نرخ تورم است.
مثال: نرخ اسمی ٪۱۵، تورم ٪۱۰:

$$r_{real} \approx 5\%$$

مثال مدیریتی: اگر سرمایه‌گذاری با نرخ ٪۲۰ و تورم ٪۲۵ باشد، نرخ واقعی منفی است — یعنی سرمایه‌گذاری ضرر می‌دهد.

۱۳.۴.۲۲ مفهوم ۱۳: ارزش زمانی پول

اصل: یک تومان امروز، ارزش بیشتری از یک تومان فردا دارد (چون می‌توانی آن را سرمایه‌گذاری کنی).
مثال: انتخاب بین دو گزینه:

- گزینه A: ۱۰۰ میلیون امروز.
- گزینه B: ۱۲۰ میلیون بعد از ۵ سال (نرخ ٪۱۰).

$$PV(B) = \frac{120}{(1.10)^5} \approx 74.51$$

پس گزینه A بهتر است.

۱۴.۴.۲۲ مفهوم ۱۴: کاربرد در ارزیابی پروژه

ارزش فعلی خالص (NPV):

$$NPV = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t} - C_0$$

قاعده تصمیم:

- $NPV > 0$: پروژه را قبول کن.
- $NPV < 0$: پروژه را رد کن.

مثال: پروژه‌ای با سرمایه اولیه ۲۰۰ میلیون، جریان نقدی ۸۰ میلیون سالانه برای ۴ سال، نرخ ٪۱۰:

$$NPV = \frac{80}{1.1} + \frac{80}{1.21} + \frac{80}{1.331} + \frac{80}{1.4641} - 200 \tag{۲۹۵}$$
$$\approx 72.73 + 66.12 + 60.11 + 54.64 - 200 \tag{۲۹۶}$$
$$= 253.6 - 200 = 53.6 \tag{۲۹۷}$$

پروژه سودآور است.

۱۵.۴.۲۲ مفهوم ۱۵: کاربرد در وام

قسط وام:

$$A = \frac{P \cdot r/n}{1 - (1 + r/n)^{-nt}}$$

که P = اصل وام، r = نرخ سالانه، n = تعداد اقساط در سال، t = تعداد سال.
مثال: وام ۵۰۰ میلیون، نرخ ٪۱۸، ۲۴ قسط ماهانه:

$$A = \frac{500 \times 0.015}{1 - (1.015)^{-24}} \approx \frac{7.5}{0.301} \approx 24.92 \text{میلیون}$$

۵.۲۲ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: بهره ساده
صورت مسئله: ۲۰۰ میلیون با نرخ ٪۱۵ ساده برای ۴ سال.
مرحله ۱: $I = 200 \times 0.15 \times 4 = 120$.
مرحله ۲: $A = 200 + 120 = 320$.
نتیجه: بهره ۱۲۰، ارزش آینده ۳۲۰ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۲: بهره مرکب
صورت مسئله: ۵۰ میلیون با نرخ ٪۱۰ مرکب برای ۵ سال.
مرحله ۱: $A = 50(1.10)^5 = 50 \times 1.61051 = 80.53$.
نتیجه: ۵۳.۸۰ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۳: مرکب ماهانه
صورت مسئله: ۱۰۰ میلیون با نرخ ٪۱۲ مرکب ماهانه برای ۳ سال.
مرحله ۱: $n = 12$، $r/n = 0.01$، $nt = 36$.
مرحله ۲: $A = 100(1.01)^{36} = 100 \times 1.4308 = 143.08$.
نتیجه: ۰۸.۱۴۳ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۴: بهره پیوسته
صورت مسئله: ۳۰۰ میلیون با نرخ ٪۸ پیوسته برای ۱۰ سال.
مرحله ۱: $A = 300e^{0.8} = 300 \times 2.2255 = 667.66$.
نتیجه: ۶۶.۶۶۷ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۵: نرخ مؤثر سالانه
صورت مسئله: نرخ اسمی ٪۱۸ با مرکب‌سازی فصلی. EAR؟
مرحله ۱: $EAR = (1.045)^4 - 1$.
مرحله ۲: $= 1.1925 - 1 = 0.1925 = 19.25\%$.
نتیجه: ۱۹.. ٪۲۵.

مثال حل‌شده

مثال ۶: ارزش فعلی
صورت مسئله: می‌خواهی بعد از ۸ سال ۵۰۰ میلیون داشته باشی، نرخ ٪۱۲.
مرحله ۱: $PV = 500/(1.12)^8$.
مرحله ۲: $(1.12)^8 \approx 2.4760$.
مرحله ۳: $PV = 500/2.476 \approx 201.94$.
نتیجه: حدود ۲۰۲ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۷: قاعده ۷۲
صورت مسئله: با نرخ ٪۹، چند سال سرمایه دو برابر می‌شود؟
مرحله ۱: قاعده ۷۲: $t \approx 72/9 = 8$ سال.
مرحله ۲: دقیق: $t = \ln 2 / \ln 1.09 \approx 8.04$.
نتیجه: حدود ۸ سال.

مثال حل‌شده

مثال ۸: نرخ واقعی
صورت مسئله: نرخ اسمی ٪۲۰، تورم ٪۱۵. نرخ واقعی.
مرحله ۱: $r_{real} = (1.20)/(1.15) - 1 \approx 4.35\%$.
مرحله ۲: تقریب: $20 - 15 = 5\%$.
نتیجه: نرخ واقعی حدود ۴.. ٪۳.

مثال حل‌شده

مثال ۹: NPV
صورت مسئله: پروژه‌ای با سرمایه اولیه ۱۰۰ میلیون، جریان نقدی ۴۰ میلیون سالانه برای ۳ سال، نرخ ٪۱۰.
مرحله ۱: $PV_1 = 40/1.1 = 36.36$.
مرحله ۲: $PV_2 = 40/1.21 = 33.06$.
مرحله ۳: $PV_3 = 40/1.331 = 30.05$.
مرحله ۴: $NPV = 99.47 - 100 = -0.53$.
نتیجه: NPV منفی ⟵ پروژه را رد کن.

مثال حل‌شده

مثال ۱۰: قسط وام
صورت مسئله: وام ۳۰۰ میلیون، نرخ ٪۲۴، ۱۲ قسط ماهانه.
مرحله ۱: $r/n = 0.02$، $nt = 12$.
مرحله ۲: $A = \frac{300 \times 0.02}{1-(1.02)^{-12}}$.
مرحله ۳: $(1.02)^{12} \approx 1.2682$.
مرحله ۴: $A = 6/(1 - 0.7885) = 6/0.2115 \approx 28.37$.
نتیجه: قسط ماهانه ≈ ۳۷.۲۸ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۱۱: مقایسه دو بانک
صورت مسئله: بانک A نرخ ٪۱۵ ماهانه، بانک B نرخ ٪۱۶ شش‌ماهه. کدام بهتر؟
مرحله ۱: $EAR_A = (1.0125)^{12} - 1 \approx 0.1608 = 16.08\%$.
مرحله ۲: $EAR_B = (1.08)^2 - 1 = 0.1664 = 16.64\%$.
نتیجه: بانک B بهتر است (نرخ مؤثر بالاتر).

مثال حل‌شده

مثال ۱۲: زمان رسیدن به هدف
صورت مسئله: با نرخ ٪۱۰، چقدر طول می‌کشد ۱۰۰ میلیون به ۳۰۰ میلیون برسد؟
مرحله ۱: $(1.10)^t = 3 \Rightarrow t = \ln 3 / \ln 1.10$.
مرحله ۲: $t = 1.0986/0.0953 \approx 11.53$.
نتیجه: حدود ۱۱.۵ سال.

مثال حل‌شده

مثال ۱۳: نرخ لازم
صورت مسئله: می‌خواهی ۱۰۰ میلیون در ۱۰ سال به ۲۵۰ میلیون برسد. نرخ لازم؟
مرحله ۱: $(1+r)^{10} = 2.5 \Rightarrow 1 + r = (2.5)^{0.1}$.
مرحله ۲: $(2.5)^{0.1} \approx 1.096$.
نتیجه: نرخ لازم ≈ ٪۹.۶.

مثال حل‌شده

مثال ۱۴: بهره پیوسته و ارزش فعلی
صورت مسئله: ۱۰۰۰ میلیون در ۵ سال آینده، نرخ ٪۶ پیوسته. ارزش فعلی؟
مرحله ۱: $PV = 1000e^{-0.30}$.
مرحله ۲: $e^{-0.30} \approx 0.7408$.
نتیجه: $PV \approx 740.8$ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۱۵: مرکب‌سازی روزانه
صورت مسئله: ۱۰۰ میلیون با نرخ ٪۱۰ روزانه برای ۱ سال.
مرحله ۱: $n = 365$، $r/n = 0.10/365 \approx 0.000274$.
مرحله ۲: $A = 100(1.000274)^{365} \approx 110.52$.
نتیجه: ۵۲.۱۱۰ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۱۶: اثر مرکب‌سازی
صورت مسئله: ۵۰ میلیون با نرخ ٪۸ برای ۱۰ سال. مقایسه سالانه، ماهانه، پیوسته.
مرحله ۱: سالانه: $50(1.08)^{10} \approx 107.95$.
مرحله ۲: ماهانه: $50(1.00667)^{120} \approx 111.10$.
مرحله ۳: پیوسته: $50e^{0.8} \approx 111.28$.
نتیجه: تفاوت‌ها حدود ٪۳.

مثال حل‌شده

مثال ۱۷: انتخاب پروژه
صورت مسئله: پروژه A: سرمایه ۱۰۰، بازده ۱۵۰ در ۳ سال. پروژه B: سرمایه ۱۰۰، بازده ۱۸۰ در ۵ سال. نرخ ٪۱۰.
مرحله ۱: $NPV_A = 150/(1.10)^3 - 100 = 112.70 - 100 = 12.70$.
مرحله ۲: $NPV_B = 180/(1.10)^5 - 100 = 111.77 - 100 = 11.77$.
نتیجه: پروژه A کمی بهتر.

مثال حل‌شده

مثال ۱۸: بازپرداخت وام
صورت مسئله: وام ۲۰۰ میلیون با نرخ ٪۱۸، پرداخت ماهانه ۵ میلیون. چند ماه طول می‌کشد؟
مرحله ۱: $n = -\ln(1 - Pr/A)/\ln(1 + r)$.
مرحله ۲: $Pr/A = 200 \times 0.015/5 = 0.6$.
مرحله ۳: $n = -\ln(0.4)/\ln(1.015) \approx 0.9163/0.01489 \approx 61.5$.
نتیجه: حدود ۶۲ ماه.

مثال حل‌شده

مثال ۱۹: سرمایه‌گذاری ماهانه
صورت مسئله: هر ماه ۱ میلیون سرمایه‌گذاری می‌کنی، نرخ ٪۱۲، ۲۰ سال. ارزش آینده؟
مرحله ۱: $A = 1 \times \frac{(1.01)^{240}-1}{0.01}$.
مرحله ۲: $(1.01)^{240} \approx 10.8926$.
مرحله ۳: $A = 989.26$ میلیون.
نتیجه: حدود ۹۸۹ میلیون (تقریباً یک میلیارد).

مثال حل‌شده

مثال ۲۰: مقایسه پرداخت یکجا و اقساط
صورت مسئله: پرداخت یکجا ۸۰۰ میلیون یا ۲۴ قسط ۴۰ میلیونی با نرخ ٪۱۵.
مرحله ۱: $PV = 40 \times \frac{1-(1.0125)^{-24}}{0.0125}$.
مرحله ۲: $(1.0125)^{24} \approx 1.3474$.
مرحله ۳: $PV = 40 \times (1-0.7422)/0.0125 = 40 \times 20.624 = 824.96$.
نتیجه: اقساط گران‌تر از پرداخت یکجا (۸۲۵ > ۸۰۰).

۶.۲۲ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه ۱: اشتباه بین بهره ساده و مرکب.
راه پیشگیری: بهره ساده: $I = Prt$؛ مرکب: $A = P(1+r)^t$.
اشتباه ۲: فراموش کردن تقسیم نرخ بر تعداد مرکب‌سازی.
راه پیشگیری: r/n و nt.
اشتباه ۳: اشتباه بین نرخ اسمی و مؤثر.
راه پیشگیری: نرخ اسمی = اعلامی؛ مؤثر = واقعی.
اشتباه ۴: استفاده از نرخ سالانه در دوره‌های ماهانه بدون تبدیل.
راه پیشگیری: نرخ ماهانه = نرخ سالانه / ۱۲.
اشتباه ۵: فراموش کردن علامت منفی در توان در ارزش فعلی.
راه پیشگیری: $PV = FV(1+r)^{-t}$.
اشتباه ۶: اشتباه در تبدیل درصد به اعشار.
راه پیشگیری: ٪۱۲ = ۰.۱۲.
اشتباه ۷: فراموش کردن تورم در محاسبات بلندمدت.
راه پیشگیری: نرخ واقعی = نرخ اسمی منهای تورم.
اشتباه ۸: اشتباه در فرمول قسط وام.
راه پیشگیری: $A = \frac{Pr}{1-(1+r)^{-n}}$.

۷.۲۲ کاربرد در مدیریت

کاربرد مدیریتی

کاربرد ۱: ارزیابی سرمایه‌گذاری
NPV و IRR برای انتخاب پروژه.
کاربرد ۲: تعیین قسط وام
محاسبه قسط ماهانه وام‌های بانکی.
کاربرد ۳: برنامه‌ریزی بازنشستگی
محاسبه سرمایه لازم برای بازنشستگی.
کاربرد ۴: بودجه‌بندی سرمایه‌ای
انتخاب بین پروژه‌ها با NPV.
کاربرد ۵: تحلیل اجاره یا خرید
مقایسه ارزش فعلی اجاره با خرید.
کاربرد ۶: مدیریت بدهی
محاسبه زمان بازپرداخت وام.
کاربرد ۷: برنامه‌ریزی پس‌انداز
محاسبه مبلغ ماهانه برای رسیدن به هدف.
کاربرد ۸: تحلیل نرخ مؤثر
مقایسه پیشنهادهای بانک‌ها.
کاربرد ۹: قیمت‌گذاری اوراق قرضه
ارزش فعلی جریان‌های نقدی آینده.
کاربرد ۱۰: مدیریت ریسک
ارزیابی حساسیت پروژه به نرخ بهره.

۸.۲۲ خلاصه فصل

مفهوم	فرمول	کاربرد
بهره ساده	$I = Prt$	وام کوتاه‌مدت
بهره مرکب	$A = P(1+r)^t$	سرمایه‌گذاری
مرکب n بار	$A = P(1+r/n)^{nt}$	بانکداری
پیوسته	$A = Pe^{rt}$	مالی پیشرفته
نرخ مؤثر	$EAR = (1+r/n)^n - 1$	مقایسه
ارزش فعلی	$PV = FV(1+r)^{-t}$	ارزیابی
NPV	$\sum CF_t(1+r)^{-t} - C_0$	پروژه
قسط وام	$A = \frac{Pr}{1-(1+r)^{-n}}$	بازپرداخت
قاعده ۷۲	$t \approx 72/(r \times 100)$	تخمین
نرخ واقعی	$r_{real} \approx r - \pi$	تورم

۹.۲۲ خودآزمایی

۱.۹.۲۲ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. بهره ساده ۱۰۰ میلیون با نرخ ٪۱۰ برای ۳ سال:

آ) ۲۰

ب) ۳۰

ج) ۴۰

د) ۵۰

۲. ارزش آینده ۱۰۰ میلیون با نرخ ٪۱۰ مرکب برای ۲ سال:

آ) ۱۲۰

ب) ۱۲۱

ج) ۱۲۲

د) ۱۲۵

۳. ۵۰ میلیون با نرخ ٪۸ ساده برای ۵ سال:

آ) ۶۰

ب) ۷۰

ج) ۷۵

د) ۸۰

۴. EAR برای نرخ ٪۱۲ ماهانه:

آ) ٪۱۲

ب) ٪۱۲.۳۶

ج) ٪۱۲.۶۸

د) ٪۱۳

۵. $A = 100e^{0.1\times5}$ تقریباً:

آ) ۱۵۰

ب) ۱۶۰

ج) ۱۶۵

د) ۱۷۰

۶. PV برای ۲۰۰ میلیون در ۵ سال، نرخ ٪۱۰:

آ) ۱۰۰

ب) ۱۲۴

ج) ۱۴۰

د) ۱۵۰

۷. قاعده ۷۲ با نرخ ٪۶:

آ) ۸ سال

ب) ۱۰ سال

ج) ۱۲ سال

د) ۱۴ سال

۸. نرخ واقعی با اسمی ٪۱۸ و تورم ٪۱۲:

آ) ٪۴

ب) ٪۵

ج) ٪۶

د) ٪۳۰

۹. ۱۰۰ میلیون با نرخ ٪۱۲ فصلی برای ۲ سال:

آ) ۱۲۴

ب) ۱۲۵

ج) ۶۸.۱۲۶

د) ۱۳۰

۱۰. زمان دوبرابر شدن با نرخ ٪۹ (دقیق):

آ) ۵.۷ سال

ب) ۸ سال

ج) ۵.۸ سال

د) ۹ سال

۱۱. نرخ واقعی اگر تورم ٪۸ و نرخ اسمی ٪۵:

آ) ٪۳

ب) ٪۱۳

ج) $-$

د) $-.$

۱۲. $PV = e^{-0.05\times 10}$ تقریباً:

آ) ۲۵۰

ب) ۳۰۰

ج) ۳.۳۰۳

د) ۳۵۰

۱۳. ۲۰۰ میلیون با نرخ ٪۵ ساده برای ۳ سال:

آ) ۲۱۵

ب) ۲۲۰

ج) ۲۳۰

د) ۲۴۰

۱۴. نرخ اسمی برای ٪۱۰=EAR با ماهانه:

آ) ۹..٪۵۷

ب) ٪۱۰

ج) ۱۰..٪۵

د) ٪۱۱

۱۵. اگر ۱۰۰ میلیون در ۱۵ سال به ۴۰۰ برسد، نرخ تقریبی:

آ) ۶..٪۵

ب) ۹..٪۶۸

ج) ٪۱۲

د) ٪۱۵

۲.۹.۲۲ تشریحی (۸ سوال)

۱۶. ۳۰۰ میلیون با نرخ ٪۱۲ ساده برای ۵ سال.
۱۷. ۲۰۰ میلیون با نرخ ٪۱۰ مرکب برای ۸ سال.
۱۸. EAR برای نرخ ٪۲۴ شش‌ماهه.
۱۹. PV برای ۱۰۰۰ میلیون در ۱۰ سال، نرخ ٪۸.
۲۰. ۵۰۰ میلیون با نرخ ٪۶ پیوسته برای ۱۵ سال.
۲۱. NPV پروژه با سرمایه ۵۰۰، جریان ۱۵۰ سالانه برای ۵ سال، نرخ ٪۱۰.
۲۲. قسط وام ۱۰۰۰ میلیون، نرخ ٪۲۴، ۳۶ قسط ماهانه.
۲۳. زمان دوبرابر شدن با نرخ ٪۱۸ (دقیق).

۱۰.۲۲ پاسخنامه تشریحی

۱. ب) $I = 100 \times 0.10 \times 3 = 30$.
۲. ب) $A = 100(1.1)^2 = 121$.
۳. ب) $A = 50 + 50 \times 0.08 \times 5 = 70$.
۴. ج) $EAR = (1.01)^{12} - 1 = 12.68\%$.
۵. ج) $e^{0.5} \approx 1.6487$، $A \approx 164.87$.
۶. ب) $200/(1.1)^5 \approx 124.18$.
۷. ج) $72/6 = 12$.
۸. ب) $18 - 12 = 6\%$ یا دقیق: $(1.18/1.12) - 1 = 5.36\%$.

۹. **ج)** $A = 100(1.03)^8 \approx 126.68$.
۱۰. **ب)** $\ln 2 / \ln 1.09 \approx 8.04$.
۱۱. **د)** $(1.05/1.08) - 1 \approx -2.78\%$.
۱۲. **ج)** $500 \times e^{-0.5} \approx 500 \times 0.6065 \approx 303.3$.
۱۳. **ج)** $I = 200 \times 0.05 \times 3 = 30$، $A = 230$.
۱۴. **الف)** $r = 12[(1.10)^{1/12} - 1] \approx 9.57\%$.
۱۵. **ب)** $r = (4)^{1/15} - 1 \approx 0.0968 = 9.68\%$.
۱۶. $I = 300 \times 0.12 \times 5 = 180$. $A = 480$.
۱۷. $A = 200(1.1)^8 = 200 \times 2.1436 = 428.72$.
۱۸. $EAR = (1.12)^2 - 1 = 0.2544 = 25.44\%$.
۱۹. $PV = 1000/(1.08)^{10} = 1000/2.1589 \approx 463.19$.
۲۰. $A = 500e^{0.9} = 500 \times 2.4596 = 1229.8$.
۲۱. $\sum_{t=1}^{5} 150/(1.1)^t = 150 \times 3.7908 \approx 568.62$. $NPV = 568.62 - 500 = 68.62$.
۲۲. $A = \frac{1000 \times 0.02}{1-(1.02)^{-36}} \approx 2.0399$. $(1.02)^{36} \approx 39.23$. $A = 20/0.5098 \approx 39.23$.
۲۳. $t = \ln 2 / \ln 1.18 = 0.6931/0.1655 \approx 4.19$ سال.

۱۱.۲۲ منابع پیشنهادی

- پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. فصل ۱۸.
- رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. فصل ۱۸.
- نیکوکار، م. (۱۳۹۷). *ریاضیات عمومی*. فصل ۱۸.
- T. S. Tan، (۲۰۱۹). *Applied Mathematics for Managerial، Social and Life Sci-ences*. Ch. ۵.
- A. S. Salzman، (۲۰۱۷). *Mathematics for Business*. Ch. ۱۳.
- E. Ummer، (۲۰۱۸). *Basic Mathematics for Economics، Business and Finance*. Ch. ۱۵.

ایست بازرسی

پایان فصل ۱۸ — نسخه توسعه‌یافته
آمار: ~۲۴ صفحه A۴ | ۲۰ مثال حل‌شده | ۲۳ سوال | ۶ منبع

xcolor enumitem booktabs geometry amsmath،amssymb،amsthm [۱۲pt،a۴paper]article
xepersian hyperref tcolorbox
margin=۲.۵cm
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)
فصل ۱۹: اقساط و برنامه‌ریزی مالی (نسخه توسعه‌یافته) تیم ۵ نفره معمار آموزشی ۱۳ مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۲۳ فصل ۱۹: اقساط و برنامه‌ریزی مالی (نسخه توسعه‌یافته – حجم دوبرابر)

۱.۲۳ چکیده

در فصل قبل با بهره ساده، مرکب و پیوسته آشنا شدی. حالا می‌خواهیم این مفاهیم را در قالب «جریان‌های نقدی دوره‌ای» — یعنی اقساط — به کار ببریم. اقساط، ستون فقرات برنامه‌ریزی مالی هستند: وام مسکن، وام خودرو، لیزینگ، بیمه عمر، صندوق بازنشستگی، و حتی پس‌انداز ماهانه برای خرید خانه. در این فصل، ارزش فعلی اقساط (PV)، ارزش آینده اقساط (FV)، قسط وام (PMT)، جدول استهلاک، صندوق ذخیره (Sinking Fund)، اقساط پیش‌پرداخت و پس‌پرداخت، اقساط بی‌نهایت (Perpetuity)، نرخ بازده داخلی (IRR) و کاربردهای گسترده مدیریتی را می‌آموزی. هدف نهایی: بتوانی هر مسئله برنامه‌ریزی مالی را با فرمول‌های اقساط حل کنی و بهترین تصمیم مالی را بگیر.

۲.۲۳ اهداف یادگیری

- **تعریف کند:** اقساط، جریان نقدی، ارزش فعلی اقساط، ارزش آینده اقساط، قسط، جدول استهلاک، صندوق ذخیره، اقساط بی‌نهایت، IRR.
- **محاسبه کند:** PV اقساط، FV اقساط، قسط وام، تعداد اقساط، نرخ بهره، جدول استهلاک.
- **تحلیل کند:** تفاوت اقساط پیش‌پرداخت و پس‌پرداخت، اثر پیش‌پرداخت، اثر نرخ.
- **به‌کار برد:** فرمول‌های اقساط برای تصمیم‌گیری مالی.
- **مدل‌سازی کند:** وام، پس‌انداز، بازنشستگی، اجاره، لیزینگ.
- **ارزیابی کند:** کدام گزینه مالی بهتر است (وام، اجاره، خرید نقدی).

۳.۲۳ مقدمه طنز

تصور کن می‌خواهی خانه‌ای ۵ میلیارد تومانی بخری. بانک می‌گوید: «٪۲۰ پیش‌پرداخت بده، بقیه را ۲۰ ساله با نرخ ٪۱۸ ماهانه قسط بده.» حالا سوال این است: قسط ماهانه‌ات چقدر می‌شود؟ اگر بلد نباشی فرمول اقساط را حساب کنی، ممکن است فکر کنی «۱ میلیارد قسط می‌شود» — در حالی که واقعیت این است که قسط ماهانه حدود ۵۸ میلیون تومان می‌شود! این تفاوت، همان قدرت فرمول‌های اقساط است.

اقساط مثل «خرید قسطی» هستند: به جای اینکه یک‌باره پول کلانی بدهی، آن را به قطعات کوچک تقسیم می‌کنی. اما این قطعات کوچک، در مجموع بیشتر از پول یکجا می‌شوند — چون بهره هم به آن‌ها اضافه می‌شود. اینجاست که فرمول‌های اقساط به کمک می‌آیند تا بدانی دقیقاً چقدر می‌پردازی.

نکته طنزآمیز ماجرا اینجاست: بسیاری از افراد فکر می‌کنند «قسط یعنی تقسیم قیمت بر تعداد ماه‌ها» و از بهره غافل می‌شوند. مثلاً اگر خانه ۵ میلیارد باشد و ۲۰ سال قسط، فکر می‌کنند قسط ماهانه ۲۰ میلیون است. اما با نرخ ٪۱۸، قسط واقعی حدود ۵۸ میلیون می‌شود — یعنی سه برابر! این فصل، تو را از «تفکر ساده‌لوحانه» به «تفکر مالی دقیق» می‌برد.

۴.۲۳ مفاهیم اصلی

۱.۴.۲۳ مفهوم ۱: تعریف اقساط و اصطلاحات پایه

تعریف اقساط: مجموعه‌ای از پرداخت‌های مساوی که در فواصل زمانی مساوی انجام می‌شوند.
انواع اقساط:

- **اقساط پس‌پرداخت (Ordinary Annuity):** پرداخت در پایان هر دوره.

- **اقساط پیش‌پرداخت (Annuity Due):** پرداخت در ابتدای هر دوره.

اصطلاحات پایه:

- **PMT:** مبلغ هر قسط.
- n: تعداد اقساط.
- r: نرخ بهره در هر دوره.
- **PV:** ارزش فعلی اقساط.
- **FV:** ارزش آینده اقساط.

شهود: اقساط مثل «قطار پرداخت» است: هر دوره، یک واگن پرداخت می‌رسد.
مثال مدیریتی: وام مسکن، وام خودرو، بیمه عمر، پس‌انداز ماهانه، لیزینگ تجهیزات.

۲.۴.۲۳ مفهوم ۲: ارزش فعلی اقساط پس‌پرداخت

قضیه

ارزش فعلی اقساط پس‌پرداخت:

$$PV = PMT \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

ضریب ارزش فعلی اقساط (PVIFA):

$$PVIFA(r,n) = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

شهود: ارزش فعلی، مجموع ارزش فعلی همه اقساط آینده است.
اثبات: ارزش فعلی قسط اول: $PMT(1+r)^{-1}$، دوم: $PMT(1+r)^{-2}$، ...، nـام: $PMT(1+r)^{-n}$.
جمع این‌ها یک دنباله هندسی با $a_1 = PMT(1+r)^{-1}$ و نسبت $(1+r)^{-1}$ است:

$$PV = PMT \cdot \frac{(1+r)^{-1}[1-(1+r)^{-n}]}{1-(1+r)^{-1}} = PMT \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

مثال ساده: وام ۱۰۰ میلیون، نرخ ٪۱ ماهانه، ۱۲ قسط. قسط ماهانه:

$$PMT = \frac{100 \times 0.01}{1-(1.01)^{-12}} = \frac{1}{1-0.8874} = \frac{1}{0.1126} \approx 8.88 \text{میلیون}$$

مثال مدیریتی: وام ۵۰۰ میلیون، نرخ ۱.٪۵ ماهانه، ۶۰ قسط:

$$PMT = \frac{500 \times 0.015}{1-(1.015)^{-60}} \approx \frac{7.5}{1-0.4093} \approx \frac{7.5}{0.5907} \approx 12.70 \text{میلیون}$$

۳.۴.۲۳ مفهوم ۳: ارزش آینده اقساط پس‌پرداخت

قضیه

ارزش آینده اقساط پس‌پرداخت:

$$FV = PMT \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

ضریب ارزش آینده اقساط (FVIFA):

$$FVIFA(r,n) = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

شهود: ارزش آینده، مجموع ارزش آینده همه اقساط در پایان دوره است.
اثبات: قسط اول $PMT(1+r)^{n-1}$ دوره بهره می‌گیرد: $n-1$، قسط دوم $PMT(1+r)^{n-2}$ دوره: $n-2$، ...، قسط آخر: PMT. جمع:

$$FV = PMT \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

مثال ساده: هر ماه ۵ میلیون پس‌انداز، نرخ ۱٪ ماهانه، ۱۲ ماه:

$$FV = 5 \cdot \frac{(1.01)^{12} - 1}{0.01} = 5 \cdot \frac{0.1268}{0.01} = 5 \times 12.68 = 63.41 \text{میلیون}$$

مثال مدیریتی: پس‌انداز بازنشستگی ماهانه ۳ میلیون، نرخ ۰.۸٪ ماهانه، ۳۰ سال (۳۶۰ ماه):

$$FV = 3 \cdot \frac{(1.008)^{360} - 1}{0.008} \approx 3 \times 2248.6 \approx 6745.8 \text{میلیون}$$

یعنی حدود ۷.۶ میلیارد تومان!

۴.۴.۲۳ مفهوم ۴: قسط وام (PMT)

قضیه

فرمول قسط وام:

$$PMT = \frac{PV \cdot r}{1 - (1+r)^{-n}}$$

که PV = مبلغ وام، r = نرخ هر دوره، n = تعداد اقساط.

شهود: قسط، مبلغی است که اگر n بار پرداخت شود، ارزش فعلی‌اش برابر مبلغ وام شود.
مثال ساده: وام ۲۰۰ میلیون، نرخ ۲٪ ماهانه، ۲۴ قسط:

$$PMT = \frac{200 \times 0.02}{1 - (1.02)^{-24}} \approx \frac{4}{1 - 0.6217} \approx \frac{4}{0.3783} \approx 10.57 \text{میلیون}$$

مثال مدیریتی: وام ۱۰۰۰ میلیون (۱ میلیارد)، نرخ ۱.۵٪، ۱۲۰ قسط:

$$PMT = \frac{1000 \times 0.015}{1 - (1.015)^{-120}} \approx \frac{15}{1 - 0.1670} \approx \frac{15}{0.8330} \approx 18.01 \text{میلیون}$$

۵.۴.۲۳ مفهوم ۵: اقساط پیش‌پرداخت (Annuity Due)

قضیه

ارزش فعلی اقساط پیش‌پرداخت:

$$PV_{due} = PMT \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \cdot (1+r)$$

ارزش آینده:

$$FV_{due} = PMT \cdot \frac{(1+r)^{n}-1}{r} \cdot (1+r)$$

شهود: در اقساط پیش‌پرداخت، یک دوره بهره بیشتر به هر قسط اضافه می‌شود.
رابطه:

$$PV_{due} = PV_{ordinary} \times (1+r)$$

مثال: همان وام ۱۰۰ میلیون، نرخ ٪۱، ۱۲ قسط پیش‌پرداخت:

$$PMT_{due} = \frac{100 \times 0.01}{1-(1.01)^{-12}} \times \frac{1}{1.01} \approx 8.79 \text{میلیون}$$

مثال مدیریتی: اجاره پیش‌پرداخت (ابتدای هر ماه) از نظر ارزش فعلی، گران‌تر از اجاره پس‌پرداخت (پایان ماه) است.

۶.۴.۲۳ مفهوم ۶: جدول استهلاک وام

تعریف: جدولی که نشان می‌دهد در هر قسط، چه مقدار به بهره و چه مقدار به اصل وام پرداخت می‌شود.
ساختار:

- **بهره دوره:** $I_t = B_{t-1} \cdot r$
- **اصل پرداختی:** $P_t = PMT - I_t$
- **مانده وام:** $B_t = B_{t-1} - P_t$

مثال: وام ۱۰ میلیون، نرخ ٪۱۰، ۳ قسط.

دوره	مانده اول	قسط	بهره	اصل	مانده آخر
۱	۰۰.۱۰	۰۲.۴	۰۰.۱	۰۲.۳	۹۸.۶
۲	۹۸.۶	۰۲.۴	۷۰.۰	۳۲.۳	۶۶.۳
۳	۶۶.۳	۰۲.۴	۳۷.۰	۶۶.۳	۰۰.۰

نکته: در ابتدا، بیشتر قسط به بهره می‌رود؛ در انتها، بیشتر به اصل.
مثال مدیریتی: اگر قسط اضافه بپردازی، آن مبلغ مستقیماً از اصل کم می‌شود و در دوره‌های بعد، بهره کمتری می‌پردازی.

۷.۴.۲۳ مفهوم ۷: صندوق ذخیره (Sinking Fund)

تعریف: صندوقی که برای جمع‌آوری مبلغ مشخصی در آینده، به‌صورت دوره‌ای پر می‌شود.
فرمول:

$$PMT = \frac{FV \cdot r}{(1+r)^n - 1}$$

شهود: برای رسیدن به مبلغ FV در n دوره، هر دوره چقدر باید کنار بگذاری؟
مثال: می‌خواهی بعد از ۵ سال ۵۰۰ میلیون داشته باشی، نرخ ٪۸ سالانه:

$$PMT = \frac{500 \times 0.08}{(1.08)^5 - 1} = \frac{40}{0.4693} \approx 85.23 \text{میلیون}$$

مثال مدیریتی: شرکت برای جایگزینی ماشین‌آلات بعد از ۱۰ سال، هر سال مبلغی به صندوق ذخیره واریز می‌کند.

۸.۴.۲۳ مفهوم ۸: اقساط بی‌نهایت (Perpetuity)

قضیه

ارزش فعلی اقساط بی‌نهایت:

$$PV = \frac{PMT}{r}$$

شهود: اگر اقساط تا بی‌نهایت ادامه یابند، ارزش فعلی به یک مقدار محدود میل می‌کند (چون ارزش فعلی اقساط دور، بسیار کوچک می‌شود).
مثال ساده: هر سال ۱۰۰ میلیون تا بی‌نهایت، نرخ ٪۱۰:

$$PV = 100/0.10 = 1000 \text{میلیون}$$

مثال مدیریتی: وقف دائمی (مثل موقوفات) که هر سال مبلغی را پرداخت می‌کند.
اقساط بی‌نهایت رشدکننده: اگر اقساط با نرخ g رشد کنند:

$$PV = \frac{PMT}{r-g}, \quad r > g$$

مثال: قسط اول ۱۰۰ میلیون، رشد ٪۳، نرخ ٪۱۰:

$$PV = \frac{100}{0.10 - 0.03} = \frac{100}{0.07} \approx 1428.6 \text{میلیون}$$

۹.۴.۲۳ مفهوم ۹: نرخ بازده داخلی (IRR)

تعریف: نرخی که NPV پروژه را صفر می‌کند:

$$NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+IRR)^t} = 0$$

قاعده تصمیم:

- $IRR > r$: پروژه را قبول کن.
- $IRR < r$: پروژه را رد کن.

مثال: پروژه‌ای با سرمایه ۱۰۰ و بازده ۶۰ سالانه برای ۲ سال. IRR:

$$100 = \frac{60}{1+r} + \frac{60}{(1+r)^2}$$

با حل: $1+r = x$، $100x^2 = 60x + 60$، $100x^2 - 60x - 60 = 0$، $x \approx 1.1307$، $r \approx 13.07\%$.

۱۰.۴.۲۳ مفهوم ۱۰: مدت بازپرداخت (Payback Period)

تعریف: مدت زمانی که طول می‌کشد تا جریان‌های نقدی، سرمایه اولیه را جبران کنند.
مثال: سرمایه ۲۰۰، جریان نقدی ۸۰ سالانه:

$$\text{دوره بازپرداخت} = 200/80 = 2.5 \text{سال}$$

مثال مدیریتی: اگر شرکت بخواهد سرمایه‌گذاری‌اش در حداکثر ۳ سال بازگردد، پروژه با دوره ۵.۲ سال قابل قبول است.

۱۱.۴.۲۳ مفهوم ۱۱: نرخ بازده حسابداری (ARR)

تعریف: نسبت سود متوسط سالانه به سرمایه‌گذاری اولیه:

$$ARR = \frac{\text{سود متوسط سالانه}}{\text{سرمایه اولیه}} \times 100\%$$

مثال: سرمایه ۲۰۰، سود سالانه ۴۰:

$$ARR = 40/200 = 20\%$$

۱۲.۴.۲۳ مفهوم ۱۲: برنامه‌ریزی بازنشستگی

روش: ابتدا مبلغ لازم در بازنشستگی را حساب کن، سپس مبلغ ماهانه پس‌انداز.
مثال: می‌خواهی در ۶۵ سالگی، ۲۰ سال حقوق سالانه ۱۰۰ میلیون داشته باشی (یعنی ۲ میلیارد). با نرخ ٪۸:

$$PV = 100 \times \frac{1-(1.08)^{-20}}{0.08} \approx 100 \times 9.818 = 981.8 \tag{۲۹۸}$$

$$PMT = \frac{981.8 \times 0.08/12}{(1.00667)^{360}-1} \approx \ldots \tag{۲۹۹}$$

۱۳.۴.۲۳ مفهوم ۱۳: مقایسه اجاره و خرید

روش: PV کل هزینه اجاره را با هزینه خرید مقایسه کن.
مثال: اجاره ماهانه ۲۰ میلیون به مدت ۵ سال (نرخ ٪۱ ماهانه):

$$PV = 20 \times \frac{1-(1.01)^{-60}}{0.01} = 20 \times 44.955 \approx 899.1 \text{میلیون}$$

اگر خرید نقدی ۸۰۰ میلیون باشد، خرید بهتر است.

۱۴.۴.۲۳ مفهوم ۱۴: لیزینگ در مقابل خرید

لیزینگ: اجاره بلندمدت دارایی با امکان خرید در پایان.
مثال: لیزینگ ماهانه ۱۵ میلیون برای ۳۶ ماه (نرخ ۱.٪۲). PV:

$$PV = 15 \times \frac{1-(1.012)^{-36}}{0.012} = 15 \times 29.258 \approx 438.9 \text{میلیون}$$

اگر خرید نقدی ۴۵۰ میلیون باشد، لیزینگ بهتر است.

۱۵.۴.۲۳ مفهوم ۱۵: کاربرد در بودجه‌بندی

مثال: شرکتی با بودجه ۵ میلیارد، سه پروژه دارد:

- پروژه A: سرمایه ۲ میلیارد، NPV = ۵۰۰ میلیون.
- پروژه B: سرمایه ۳ میلیارد، NPV = ۸۰۰ میلیون.
- پروژه C: سرمایه ۱ میلیارد، NPV = ۳۰۰ میلیون.

بودجه ۵ میلیارد: انتخاب A + B (NPV = ۱۳۰۰) یا A + C + ...B بهینه: B + C (NPV = ۱۱۰۰) یا A + C + یک پروژه دیگر. بهترین ترکیب بر اساس NPV و بودجه.

۵.۲۳ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: PV اقساط
صورت مسئله: قسط ماهانه ۵ میلیون، نرخ ٪۱، ۲۴ ماه. PV.
مرحله ۱: $PV = 5 \times \frac{1-(1.01)^{-24}}{0.01}$.
مرحله ۲: $(1.01)^{24} \approx 1.2697$، پس $(1.01)^{-24} \approx 0.7876$.
مرحله ۳: $PV = 5 \times \frac{0.2124}{0.01} = 5 \times 21.24 = 106.2$.
نتیجه: PV ≈ ۲.۱۰۶ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۲: FV اقساط
صورت مسئله: ماهانه ۳ میلیون پس‌انداز، نرخ ٪۰.۸، ۶۰ ماه. FV.
مرحله ۱: $FV = 3 \times \frac{(1.008)^{60}-1}{0.008}$.
مرحله ۲: $(1.008)^{60} \approx 1.6127$.
مرحله ۳: $FV = 3 \times \frac{0.6127}{0.008} = 3 \times 76.59 \approx 229.77$.
نتیجه: FV ≈ ۸.۲۲۹ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۳: قسط وام
صورت مسئله: وام ۴۰۰ میلیون، نرخ ٪۱.۲، ۸۴ قسط.
مرحله ۱: $PMT = \frac{400 \times 0.012}{1-(1.012)^{-84}}$.
مرحله ۲: $(1.012)^{84} \approx 2.7181$، پس $(1.012)^{-84} \approx 0.3679$.
مرحله ۳: $PMT = 4.8/(1-0.3679) = 4.8/0.6321 \approx 7.59$.
نتیجه: قسط ماهانه ≈ ۵۹.۷ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۴: صندوق ذخیره
صورت مسئله: هدف ۱۰۰۰ میلیون در ۱۰ سال، نرخ ٪۱۰. PMT سالانه.
مرحله ۱: $PMT = \frac{1000 \times 0.10}{(1.10)^{10}-1}$.
مرحله ۲: $(1.10)^{10} = 2.5937$.
مرحله ۳: $PMT = 100/1.5937 \approx 62.75$.
نتیجه: هر سال ۷۵.۶۲ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۵: Perpetuity
صورت مسئله: هر سال ۸۰ میلیون تا بی‌نهایت، نرخ ٪۱۰.
مرحله ۱: $PV = 80/0.10 = 800$.
نتیجه: ۸۰۰ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۶: Perpetuity رشدکننده
صورت مسئله: قسط اول ۵۰، رشد ٪۴، نرخ ٪۱۲.
مرحله ۱: $PV = 50/(0.12 - 0.04) = 50/0.08 = 625$.
نتیجه: ۶۲۵ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۷: جدول استهلاک
صورت مسئله: وام ۵۰ میلیون، نرخ ٪۵، ۳ قسط. جدول.
مرحله ۱: $PMT = \frac{50 \times 0.05}{1-(1.05)^{-3}} = \frac{2.5}{1-0.8638} = \frac{2.5}{0.1362} \approx 18.36$.
مرحله ۲: جدول:
نتیجه: جدول کامل.

مثال حل‌شده

مثال ۸: IRR
صورت مسئله: سرمایه ۲۰۰، بازده ۱۰۰ سالانه برای ۳ سال. IRR.
مرحله ۱: $200 = 100 \times \frac{1-(1+r)^{-3}}{r}$.
مرحله ۲: $2 = \frac{1-(1+r)^{-3}}{r}$.
مرحله ۳: با آزمون: $r = 0.20$: $PV = 100 \times 2.106 = 210.6 > 200$. $r = 0.25$: $PV =$ $100 \times 1.952 = 195.2 < 200$.
مرحله ۴: IRR ≈ ۲۳.۰٪.
نتیجه: IRR ≈ ۲۳.۰٪.

مثال حل‌شده

مثال ۹: دوره بازپرداخت
صورت مسئله: سرمایه ۳۰۰، جریان ۱۰۰ سالانه.
مرحله ۱: $300/100 = 3$ سال.
نتیجه: ۳ سال.

مثال حل‌شده

مثال ۱۰: مقایسه اجاره و خرید
صورت مسئله: اجاره ماهانه ۱۵، نرخ ٪۱، ۳۶ ماه. خرید نقدی ۴۵۰.
مرحله ۱: $PV = 15 \times \frac{1-(1.01)^{-36}}{0.01} = 15 \times 30.107 \approx 451.6$.
مرحله ۲: ۴۵۰ < ۴۵۱.۶.
نتیجه: خرید بهتر است.

مثال حل‌شده

مثال ۱۱: بازنشستگی
صورت مسئله: هدف: ۲۰۰۰ میلیون در ۳۰ سال. نرخ ٪۸. پس‌انداز ماهانه.
مرحله ۱: $r = 0.08/12 = 0.00667$، $n = 360$.
مرحله ۲: $PMT = \frac{2000 \times 0.00667}{(1.00667)^{360}-1}$.
مرحله ۳: $(1.00667)^{360} \approx 10.9357$.
مرحله ۴: $PMT = 13.34/9.9357 \approx 1.343$.
نتیجه: پس‌انداز ماهانه ≈ ۳۴.۱ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۱۲: اثر پیش‌پرداخت
صورت مسئله: وام ۵۰۰، نرخ ٪۱، ۶۰ قسط. اگر قسط ۱۱ پرداخت شود + ۵۰ میلیون پیش‌پرداخت، چقدر زودتر تمام می‌شود؟
مرحله ۱: PMT اصلی: $PMT = \frac{500 \times 0.01}{1-(1.01)^{-60}} \approx 11.12$.
مرحله ۲: بعد از ۱۰ قسط، مانده: $B_{10} = PMT \times \frac{1-(1.01)^{-50}}{0.01} \approx 11.12 \times 39.196 \approx 435.9$.
مرحله ۳: با ۵۰ میلیون پیش‌پرداخت، مانده: ۹.۳۸۵.
مرحله ۴: با همان قسط ۱۲.۱۱، تعداد اقساط باقی‌مانده: $n = -\ln(1 - 385.9 \times 0.01/11.12)/\ln(1.01) \approx -\ln(0.653)/0.00995 \approx 42.8$.
نتیجه: به‌جای ۵۰ قسط، ۴۳ قسط — ۷ قسط کمتر.

مثال حل‌شده

مثال ۱۳: لیزینگ
صورت مسئله: لیزینگ ماهانه ۲۰ میلیون، ۲۴ ماه، نرخ ٪۱.۵. PV.
مرحله ۱: $PV = 20 \times \frac{1-(1.015)^{-24}}{0.015}$.
مرحله ۲: $(1.015)^{24} \approx 1.4295$، $(1.015)^{-24} \approx 0.6995$.
مرحله ۳: $PV = 20 \times \frac{0.3005}{0.015} = 20 \times 20.033 \approx 400.66$.
نتیجه: PV ≈ ۷.۴۰۰ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۱۴: نرخ مؤثر وام

صورت مسئله: وام ۱۰۰۰ میلیون، ۳۶ قسط ۳۵ میلیونی. نرخ ماهانه و EAR.

مرحله ۱: $1000 = 35 \times \frac{1-(1+r)^{-36}}{r}$.

مرحله ۲: با آزمون: $r = 0.015$: $PMT = 36.15$؛ $r = 0.017$: $PMT = 35.75$؛ $r = 0.018$: $PMT = 35.28$؛ $r \approx 0.0182$.

مرحله ۳: EAR $= (1.0182)^{12} - 1 \approx 24.2\%$.

نتیجه: نرخ ماهانه ۱.۸۲٪، EAR ۲۴.۲٪.

مثال حل‌شده

مثال ۱۵: NPV پروژه

صورت مسئله: سرمایه ۸۰۰، جریان ۲۵۰ سالانه برای ۴ سال، نرخ ۱۲٪.

مرحله ۱: $PV = 250 \times \frac{1-(1.12)^{-4}}{0.12} = 250 \times 3.0373 \approx 759.3$.

مرحله ۲: $NPV = 759.3 - 800 = -40.7$.

نتیجه: NPV منفی ⟵ پروژه را رد کن.

مثال حل‌شده

مثال ۱۶: مقایسه دو وام

صورت مسئله: وام A: ۲۰۰ میلیون، نرخ ۱۸٪، ۳۶ قسط. وام B: ۲۰۰ میلیون، نرخ ۲۴٪، ۲۴ قسط. کدام بهتر؟

مرحله ۱: $PMT_A = \frac{200 \times 0.015}{1-(1.015)^{-36}} \approx \frac{3}{0.4150} \approx 7.23$.

مرحله ۲: $PMT_B = \frac{200 \times 0.02}{1-(1.02)^{-24}} \approx \frac{4}{0.3783} \approx 10.57$.

مرحله ۳: کل پرداخت A: $7.23 \times 36 = 260.28$. کل B: $10.57 \times 24 = 253.68$.

نتیجه: وام B از نظر کل پرداخت بهتر است، اما قسط ماهانه بالاتری دارد.

مثال حل‌شده

مثال ۱۷: پس‌انداز هدف

صورت مسئله: هدف ۵۰۰ میلیون در ۵ سال، نرخ ۱۲٪ ماهانه. پس‌انداز ماهانه.

مرحله ۱: $r = 0.01$، $n = 60$.

مرحله ۲: $PMT = \frac{500 \times 0.01}{(1.01)^{60}-1}$.

مرحله ۳: $(1.01)^{60} \approx 1.8167$.

مرحله ۴: $PMT = 5/0.8167 \approx 6.12$.

نتیجه: ماهانه ۱۲.۶ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۱۸: اقساط پیش‌پرداخت

صورت مسئله: اجاره ماهانه ۱۰ میلیون پیش‌پرداخت، نرخ ۱٪، ۱۲ ماه. PV.

مرحله ۱: $PV = 10 \times \frac{1-(1.01)^{-12}}{0.01} \times 1.01 = 10 \times 11.255 \times 1.01 \approx 113.68$.

نتیجه: PV ≈ ۷.۱۱۳ میلیون.

مثال حل‌شده

مثال ۱۹: ARR
صورت مسئله: سرمایه ۵۰۰، سود متوسط سالانه ۱۰۰. ARR.
مرحله ۱: $ARR = 100/500 = 20\%$.
نتیجه: ٪۲۰.

مثال حل‌شده

مثال ۲۰: تحلیل حساسیت
صورت مسئله: وام ۱۰۰۰ میلیون، نرخ ٪۱۵، ۶۰ قسط. اگر نرخ به ٪۱۸ افزایش یابد، قسط چقدر زیاد می‌شود؟
مرحله ۱: $PMT_{15} = \frac{1000 \times 0.0125}{1-(1.0125)^{-60}} \approx \frac{12.5}{0.5252} \approx 23.80$.
مرحله ۲: $PMT_{18} = \frac{1000 \times 0.015}{1-(1.015)^{-60}} \approx \frac{15}{0.5907} \approx 25.39$.
مرحله ۳: افزایش: ۵۹.۱ میلیون (۶.٪).
نتیجه: قسط ۷٪.۶ افزایش می‌یابد.

۶.۲۳ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه ۱: اشتباه بین PV و FV اقساط.
راه پیشگیری: PV برای ارزش امروز؛ FV برای ارزش آینده.
اشتباه ۲: فراموش کردن تقسیم نرخ بر تعداد دوره.
راه پیشگیری: نرخ ماهانه = نرخ سالانه / ۱۲.
اشتباه ۳: اشتباه در فرمول PMT (صورت و مخرج).
راه پیشگیری: $PMT = Pr/[1-(1+r)^{-n}]$.
اشتباه ۴: فراموش کردن ضرب در $(1+r)$ برای اقساط پیش‌پرداخت.
راه پیشگیری: پیش‌پرداخت = پس‌پرداخت × $(1+r)$.
اشتباه ۵: اشتباه بین تعداد ماه و تعداد سال.
راه پیشگیری: ۵ سال = ۶۰ ماه.
اشتباه ۶: فراموش کردن علامت منفی در توان $(1+r)^{-n}$.
راه پیشگیری: $(1+r)^{-n} = 1/(1+r)^n$.
اشتباه ۷: اشتباه در محاسبه Perpetuity رشدکننده.
راه پیشگیری: $PV = PMT/(r-g)$، شرط $r > g$.
اشتباه ۸: اشتباه در جدول استهلاک.
راه پیشگیری: در هر دوره، بهره = مانده قبل × نرخ.

۷.۲۳ کاربرد در مدیریت

کاربرد مدیریتی

کاربرد ۱: وام مسکن
محاسبه قسط ماهانه و کل پرداخت.
کاربرد ۲: وام خودرو
مقایسه گزینه‌های مختلف وام.
کاربرد ۳: لیزینگ تجهیزات
مقایسه لیزینگ با خرید نقدی.
کاربرد ۴: بازنشستگی
محاسبه پس‌انداز ماهانه برای هدف بازنشستگی.
کاربرد ۵: بودجه‌بندی سرمایه‌ای
NPV و IRR برای انتخاب پروژه.
کاربرد ۶: صندوق ذخیره
جمع‌آوری مبلغ برای جایگزینی دارایی.
کاربرد ۷: برنامه‌ریزی مالی شخصی
پس‌انداز برای خرید خانه، تحصیل، سفر.
کاربرد ۸: تحلیل اجاره vs خرید
مقایسه ارزش فعلی هزینه‌ها.
کاربرد ۹: قیمت‌گذاری اوراق قرضه
ارزش فعلی کوپن‌ها و اصل.
کاربرد ۱۰: مدیریت بدهی
برنامه‌ریزی بازپرداخت وام‌ها.

۸.۲۳ خلاصه فصل

دوره	مانده اول	قسط	بهره	اصل
۱	۰۰.۵۰	۳۶.۱۸	۵۰.۲	۸۶.۱۵
۲	۱۴.۳۴	۳۶.۱۸	۷۱.۱	۶۵.۱۶
۳	۴۹.۱۷	۳۶.۱۸	۸۷.۰	۴۹.۱۷

۹.۲۳ خودآزمایی

۱.۹.۲۳ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. قسط ماهانه وام ۱۰۰ میلیون، نرخ ٪۱، ۱۲ ماه:

آ) ۸۸.۸

ب) ۵۰.۹

ج) ۰۰.۱۰

د) ۰۰.۱۱

۲. PV اقساط ۵ میلیون ماهانه، نرخ ٪۱، ۲۴ ماه:

آ) ۱۰۰

ب) ۱۰۶

ج) ۱۱۰

د) ۱۲۰

۳. FV پس‌انداز ۲ میلیون ماهانه، نرخ ۰.٪۵، ۱۲ ماه:

آ) ۶۶.۲۴

ب) ۰۰.۲۵

ج) ۵۰.۲۵

د) ۰۰.۲۶

۴. Perpetuity ۱۰۰ با نرخ ٪۸:

آ) ۸۰۰

ب) ۱۰۰۰

ج) ۱۲۵۰

د) ۱۵۰۰

۵. Perpetuity رشد ٪۵، قسط ۵۰، نرخ ٪۱۲:

آ) ۷.۴۱۶

ب) ۵۰۰

ج) ۳.۷۱۴

د) ۱۰۰۰

۶. صندوق ذخیره برای ۱۰۰۰ در ۵ سال، نرخ ٪۱۰:

آ) ۱۵۰

ب) ۸.۱۶۳

ج) ۱۷۵

د) ۲۰۰

۷. وام ۲۰۰، نرخ ٪۲، ۲۴ قسط:

آ) ۵.۹

ب) ۵۷.۱۰

ج) ۱۱

د) ۱۲

۸. IRR پروژه با سرمایه ۱۰۰ و بازده ۶۰ برای ۲ سال:

آ) ٪۱۰

ب) ٪۱۳

ج) ٪۱۵

د) ٪۲۰

۹. دوره بازپرداخت سرمایه ۳۰۰، جریان ۱۰۰ سالانه:

آ) ۲

ب) ۳

ج) ۴

د) ۵

۱۰. PV اجاره ۲۰ ماهانه، نرخ ٪۱، ۱۲ ماه:

آ) ۲۲۰

ب) ۱.۲۲۵

ج) ۲۳۰

د) ۲۴۰

۱۱. PMT برای هدف ۵۰۰ در ۵ سال، نرخ ٪۱ ماهانه:

آ) ۵.۵

ب) ۱۲.۶

ج) ۷

د) ۸

۱۲. ARR سرمایه ۴۰۰، سود ۸۰:

آ) ٪۱۰

ب) ٪۱۵

ج) ٪۲۰

د) ٪۲۵

۱۳. اگر نرخ بهره دو برابر شود، قسط وام چقدر تغییر می‌کند؟

آ) دو برابر

ب) کمتر از دو برابر

ج) بیشتر از دو برابر

د) ثابت

۱۴. PV اقساط ۱۰ میلیون، نرخ ۰٫۵٪، ۶۰ ماه:

آ) ۵۰۰

ب) ۳.۵۱۷

ج) ۶۰۰

د) ۶۲۰

۱۵. کدام برای ارزش‌گذاری پروژه بهتر است؟

آ) IRR

ب) NPV

ج) ARR

د) Payback

۲.۹.۲۳ تشریحی (۸ سوال)

۱۶. قسط وام ۸۰۰ میلیون، نرخ ۰٫۱٪ ماهانه، ۹۶ قسط.
۱۷. PV اقساط ۸ میلیون، نرخ ۰٫۲٪، ۳۶ ماه.
۱۸. FV پس‌انداز ۴ میلیون ماهانه، نرخ ۰٫۸٪، ۱۲۰ ماه.
۱۹. صندوق ذخیره ۲۰۰۰ در ۱۵ سال، نرخ ۸٪.
۲۰. IRR پروژه سرمایه ۵۰۰، بازده ۲۰۰ سالانه برای ۳ سال.
۲۱. Perpetuity رشد ۶٪، قسط اول ۸۰، نرخ ۱۴٪.
۲۲. NPV پروژه سرمایه ۱۰۰۰، جریان ۳۰۰ سالانه برای ۵ سال، نرخ ۱۰٪.
۲۳. جدول استهلاک وام ۳۰ میلیون، نرخ ۸٪، ۳ قسط.

۱۰.۲۳ پاسخنامه تشریحی

۱. الف) $PMT = \frac{100 \times 0.01}{1-(1.01)^{-12}} = \frac{1}{0.1126} \approx 8.88$.
۲. ب) $PV = 5 \times \frac{1-(1.01)^{-24}}{0.01} \approx 5 \times 21.24 \approx 106.2$.
۳. الف) $FV = 2 \times \frac{(1.005)^{12}-1}{0.005} \approx 2 \times 12.33 \approx 24.66$.
۴. ج) $PV = 100/0.08 = 1250$.
۵. ج) $PV = 50/(0.12 - 0.05) = 50/0.07 \approx 714.3$.
۶. ب) $PMT = \frac{1000 \times 0.10}{(1.10)^5-1} = 100/0.6105 \approx 163.8$.
۷. ب) $PMT = \frac{200 \times 0.02}{1-(1.02)^{-24}} = 4/0.3783 \approx 10.57$.
۸. ب) با حل معادله: IRR ≈ ۱۳٪.
۹. ب) ۳ سال.
۱۰. ب) $PV = 20 \times \frac{1-(1.01)^{-12}}{0.01} \times 1.01 \approx 20 \times 11.255 \times 1.01 \approx 227.4$.
۱۱. ب) $PMT = \frac{500 \times 0.01}{(1.01)^{60}-1} = 5/0.8167 \approx 6.12$.
۱۲. ج) $80/400 = 20\%$.
۱۳. ب) کمتر از دو برابر (چون بهره روی مانده کمتر می‌شود).
۱۴. ب) $PV = 10 \times \frac{1-(1.005)^{-60}}{0.005} \approx 10 \times 51.73 \approx 517.3$.
۱۵. ب) NPV (بهترین معیار).

۱۶. $PMT = \frac{800 \times 0.015}{1-(1.015)^{-96}} \approx \frac{12}{0.7606} \approx 15.78$.
۱۷. $PV = 8 \times \frac{1-(1.012)^{-36}}{0.012} \approx 8 \times 29.258 \approx 234.1$.
۱۸. $FV = 4 \times \frac{(1.008)^{120}-1}{0.008} \approx 4 \times 194.98 \approx 779.9$.
۱۹. $PMT = \frac{2000 \times 0.08}{(1.08)^{15}-1} = 160/2.1722 \approx 73.66$.
۲۰. $500 = 200 \times \frac{1-(1+r)^{-3}}{r}$، $r \approx 9.7\%$.
۲۱. $PV = 80/(0.14 - 0.06) = 80/0.08 = 1000$.
۲۲. $PV = 300 \times 3.7908 = 1137.2$. $NPV = 137.2$.
۲۳. $PMT = \frac{30 \times 0.08}{1-(1.08)^{-3}} = 2.4/0.2062 \approx 11.64$.

مفهوم	فرمول	کاربرد
PV اقساط	$PMT \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$	ارزش امروز
FV اقساط	$PMT \cdot \frac{(1+r)^{n}-1}{r}$	ارزش آینده
قسط وام	$\frac{PV \cdot r}{1-(1+r)^{-n}}$	وام
صندوق ذخیره	$\frac{FV \cdot r}{(1+r)^{n}-1}$	هدف مالی
Perpetuity	PMT/r	دائمی
Perpetuity رشد	$PMT/(r-g)$	رشدکننده
پیش‌پرداخت	$PV \times (1+r)$	اجاره
IRR	$NPV = 0$	ارزیابی
دوره بازپرداخت	C_0/CF	نقدینگی
ARR	سود/سرمایه	حسابداری

۱۱.۲۳ منابع پیشنهادی

- پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. فصل ۱۹.
- رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. فصل ۱۹.
- نیکوکار، م. (۱۳۹۷). *ریاضیات عمومی*. فصل ۱۹.
- T. S. Tan، (۲۰۱۹). *Applied Mathematics for Managerial، Social and Life Sciences*. Ch. ۵-۶.
- A. S. Salzman، (۲۰۱۷). *Mathematics for Business*. Ch. ۱۴.
- E. Ummer، (۲۰۱۸). *Basic Mathematics for Economics and Finance*. Ch. ۱۶.

ایست بازرسی

پایان فصل ۱۹ — نسخه توسعه‌یافته
آمار: ∼۲۴ صفحه A۴ | ۲۰ مثال حل‌شده | ۲۳ سوال | ۶ منبع

xcolor enumitem booktabs geometry amsmath،amssymb،amsthm [۱۲pt،a۴paper]article
xepersian hyperref tcolorbox
margin=۲.۵cm
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)
فصل ۲۰: کاربردهای مشتق در مالی (نسخه توسعه‌یافته) تیم ۵ نفره معمار آموزشی ۱۳ مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۲۴ فصل ۲۰: کاربردهای مشتق در مالی (نسخه توسعه‌یافته – حجم دوبرابر)

۱.۲۴ چکیده

در فصل‌های قبل با مشتق، قوانین مشتق‌گیری، بهینه‌سازی و ریاضیات مالی آشنا شدی. حالا وقت آن است که این ابزارها را در مسائل واقعی مالی به کار ببری. مشتق در مالی، زبان «تحلیل نهایی» است: هزینه نهایی، درآمد نهایی، سود نهایی، کشش تقاضا، نرخ رشد، حساسیت ارزش فعلی به نرخ بهره، و بهینه‌سازی سود و سرمایه‌گذاری. در این فصل، مشتق به‌عنوان نرخ تغییر، تحلیل نهایی، کشش قیمتی، رابطه کشش و درآمد، بهینه‌سازی سود و درآمد، مشتق در بهره مرکب و پیوسته، حساسیت ارزش فعلی، دیرش (Duration)، بهینه‌سازی NPV، مدل EOQ، بهینه‌سازی با محدودیت، و کاربردهای گسترده مالی را می‌آموزی. هدف نهایی: بتوانی هر تصمیم مالی را با مشتق تحلیل کنی و بهترین گزینه را انتخاب کنی.

۲.۲۴ اهداف یادگیری

- **تعریف کند:** هزینه نهایی، درآمد نهایی، سود نهایی، کشش قیمتی تقاضا، نرخ رشد نسبی، دیرش، حساسیت ارزش فعلی.
- **محاسبه کند:** MC، MR، MP، کشش، نرخ رشد، مشتق NPV، مشتق PV نسبت به نرخ.
- **تحلیل کند:** رابطه کشش و درآمد کل، اثر مالیات، حساسیت بهره.
- **بهینه‌سازی کند:** حداکثر سود، حداکثر درآمد، حداقل هزینه متوسط، EOQ.
- **مدل‌سازی کند:** بهره پیوسته، ارزش فعلی، NPV، بهینه‌سازی با محدودیت.
- **ارزیابی کند:** ریسک و بازده، بار مالیات، تصمیم سرمایه‌گذاری.

۳.۲۴ مقدمه طنز

تصور کن یک مدیر مالی می‌خواهد بداند «اگر قیمت محصول را ۱٪ افزایش دهم، درآمد کل چقدر تغییر می‌کند؟» اگر بلد نباشد از کشش و مشتق استفاده کند، ممکن است ساده‌لوحانه بگوید «۱٪ افزایش قیمت، ۱٪ افزایش درآمد». اما واقعیت این است که اگر کشش تقاضا بزرگ‌تر از ۱ باشد، افزایش قیمت، درآمد را کاهش می‌دهد! این تفاوت، همان قدرت مشتق در تحلیل مالی است.

مشتق در مالی مثل «دوربین پرسرعت» است: به جای اینکه فقط ببینی «چه اتفاقی افتاد»، می‌بینی «با چه سرعتی دارد اتفاق می‌افتد». مدیر مالی با مشتق می‌تواند نرخ تغییر سود، حساسیت قیمت، و سرعت رشد را ببیند و بر اساس آن تصمیم بگیرد.

نکته طنزآمیز ماجرا اینجاست: بسیاری از مدیران فکر می‌کنند «افزایش قیمت همیشه درآمد را زیاد می‌کند» و از کشش غافل می‌شوند. اما در دنیای واقعی، اگر مشتریان حساس باشند، افزایش قیمت می‌تواند درآمد را نصف کند. این فصل، تو را از «تصمیم‌گیری شهودی» به «تصمیم‌گیری مبتنی بر مشتق» می‌برد.

۴.۲۴ مفاهیم اصلی

۱.۴.۲۴ مفهوم ۱: مشتق به‌عنوان نرخ تغییر در مالی

تعریف: مشتق تابع مالی $f(x)$ نسبت به x، نرخ تغییر لحظه‌ای f است:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

تفسیر مالی:

- $C'(q)$: هزینه نهایی.
- $R'(q)$: درآمد نهایی.
- $P'(q)$: سود نهایی.
- $U'(x)$: مطلوبیت نهایی.
- $Q'(P)$: تغییر تقاضا نسبت به قیمت.

مثال مدیریتی: اگر $C(q) = q^2 + 10q + 100$، آنگاه $C'(q) = 2q + 10$. در $q = 20$، $C'(20) = 50$: هر واحد اضافه، ۵۰ واحد هزینه اضافه می‌کند.

۲.۴.۲۴ مفهوم ۲: هزینه نهایی، درآمد نهایی، سود نهایی

قضیه

$$MC = C'(q) \tag{۳۰۰}$$
$$MR = R'(q) \tag{۳۰۱}$$
$$MP = P'(q) = R'(q) - C'(q) = MR - MC \tag{۳۰۲}$$

شهود:

- هزینه نهایی: «هزینه تولید یک واحد بیشتر».
- درآمد نهایی: «درآمد فروش یک واحد بیشتر».
- سود نهایی: «سود یک واحد بیشتر».

مثال: $R(q) = 100q - q^2$، $C(q) = 20q + 100$.

$$MR = 100 - 2q \tag{۳۰۳}$$
$$MC = 20 \tag{۳۰۴}$$
$$MP = 80 - 2q \tag{۳۰۵}$$

در $q = 30$: $MR = 40$، $MC = 20$، $MP = 20$ ⟵ تولید اضافه سودآور است.

۳.۴.۲۴ مفهوم ۳: بهینه‌سازی سود

قضیه

سود در نقطه‌ای ماکسیمم است که:

$$P'(q) = 0 \quad \text{یعنی} \quad MR = MC$$

و شرط کافی:

$$P''(q) < 0$$

مثال: $R(q) = 100q - q^2$، $C(q) = 20q + 100$.

$$P(q) = -q^2 + 80q - 100 \quad (۳۰۶)$$
$$P'(q) = -2q + 80 = 0 \Rightarrow q = 40 \quad (۳۰۷)$$
$$P''(q) = -2 < 0 \Rightarrow \text{ماکسیمم} \quad (۳۰۸)$$
$$P(40) = -1600 + 3200 - 100 = 1500 \quad (۳۰۹)$$

مثال مدیریتی: اگر $q = 40$، قیمت از تقاضا: $P = 100 - q = 60$. سود ۱۵۰۰.

۴.۴.۲۴ مفهوم ۴: کشش قیمتی تقاضا

قضیه

کشش قیمتی تقاضا:

$$E_d = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$$

تفسیر:

- $|E_d| > 1$: تقاضا باکشش (حساس).
- $|E_d| < 1$: تقاضا کم‌کشش (غیرحساس).
- $|E_d| = 1$: کشش واحد.

مثال: $Q = 100 - 2P$. در $P = 20$، $Q = 60$:

$$E_d = (-2) \cdot \frac{20}{60} = -\frac{2}{3} \approx -0.67$$

کم‌کشش.

مثال مدیریتی: اگر کشش کم باشد، افزایش قیمت درآمد را افزایش می‌دهد. اگر کشش زیاد باشد، افزایش قیمت درآمد را کاهش می‌دهد.

۵.۴.۲۴ مفهوم ۵: رابطه کشش و درآمد نهایی

قضیه

$$MR = P\left(1 + \frac{1}{E_d}\right)$$

شهود: اگر کشش واحد باشد ($E_d = -1$)، $MR = 0$ و درآمد ماکسیمم است.

مثال: $P = 50$، $E_d = -2$:

$$MR = 50(1 - 0.5) = 25$$

مثال مدیریتی: در نقطه حداکثر درآمد، $MR = 0$ و $E_d = -1$.

۶.۴.۲۴ مفهوم ۶: بهینه‌سازی درآمد

اصل: درآمد در نقطه‌ای ماکسیمم است که:

$$R'(q) = 0 \Rightarrow MR = 0$$

و در آن نقطه $E_d = -1$.

مثال: $P = 200 - 4Q$. $R = 200Q - 4Q^2$.

$$R' = 200 - 8Q = 0 \Rightarrow Q = 25$$

$$P = 100, \quad R = 2500$$

۷.۴.۲۴ مفهوم ۷: مالیات و کشش

بار مالیات: اگر مالیات بر واحد t باشد، قیمت مصرف‌کننده افزایش می‌یابد. سهم مصرف‌کننده از مالیات:

$$\frac{E_d}{E_d + E_s}$$

که E_s کشش عرضه است.

مثال: $E_d = -2$، $E_s = 1$:

$$\text{سهم مصرف‌کننده} = \frac{-2}{-2+1} = 2$$

یعنی مصرف‌کننده دو برابر تولیدکننده مالیات می‌پردازد.

۸.۴.۲۴ مفهوم ۸: نرخ رشد نسبی

قضیه

نرخ رشد نسبی:

$$\frac{d}{dt} \ln y = \frac{y'}{y}$$

مثال: $y = 100e^{0.12t}$:

$$\frac{y'}{y} = 0.12 = 12\%$$

مثال مدیریتی: اگر فروش با نرخ ۸٪ رشد کند، $S' = 0.08S$.

۹.۴.۲۴ مفهوم ۹: مشتق در بهره مرکب و پیوسته

بهره پیوسته: $A = Pe^{rt}$.

$$\frac{dA}{dt} = rPe^{rt} = rA \tag{۳۱۰}$$

$$\frac{dA}{dr} = tPe^{rt} = tA \tag{۳۱۱}$$

تفسیر: نرخ تغییر سرمایه نسبت به زمان = rA؛ حساسیت به نرخ = tA.

مثال: $P = 100$، $r = 0.10$، $t = 5$: $A = 100e^{0.5} \approx 164.87$.

$$\frac{dA}{dr} = 5 \times 164.87 = 824.35$$

یعنی افزایش ۱ واحدی در نرخ (۱ = ۱۰۰٪) ارزش را ۸۲۴ واحد زیاد می‌کند.

۱۰.۴.۲۴ مفهوم ۱۰: حساسیت ارزش فعلی به نرخ بهره

قضیه

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^t}$$
$$\frac{dPV}{dr} = -\frac{t \cdot FV}{(1+r)^{t+1}} = -\frac{t \cdot PV}{1+r}$$

شهود: افزایش نرخ بهره، ارزش فعلی را کاهش می‌دهد. هرچه t بزرگ‌تر، حساسیت بیشتر.
مثال: $FV = 1000$، $r = 0.08$، $t = 10$:

$$PV = 1000/(1.08)^{10} \approx 463.19$$

$$\frac{dPV}{dr} = -10 \times 463.19/1.08 \approx -4288.8$$

افزایش ۱٪ نرخ (۰.۰۱)، PV را حدود ۹.۴۲ کاهش می‌دهد.

۱۱.۴.۲۴ مفهوم ۱۱: دیرش (Duration)

تعریف تقریبی:

$$D = -\frac{dPV}{dr} \cdot \frac{1+r}{PV}$$

برای یک پرداخت واحد: $D = t$.
مثال: برای FV در ۱۰ سال، $D = 10$.
تفسیر: دیرش، «زمان متوسط وزنی دریافت جریان‌ها» است. هرچه دیرش بیشتر، حساسیت به نرخ بهره بیشتر.

۱۲.۴.۲۴ مفهوم ۱۲: بهینه‌سازی NPV

NPV:

$$NPV = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t} - C_0$$

حداکثر NPV با مشتق نسبت به متغیر تصمیم (مثلاً مقدار تولید یا سرمایه‌گذاری).
مثال: پروژه‌ای با جریان نقدی $CF(q) = 100q - q^2$ و سرمایه ثابت ۵۰۰. $NPV(q)$:

$$NPV = \frac{100q - q^2}{(1+r)} - 500$$

مشتق نسبت به q: $(100 - 2q)/(1+r) = 0 \Rightarrow q = 50$.

۱۳.۴.۲۴ مفهوم ۱۳: مدل EOQ با مشتق

هزینه کل:

$$TC(Q) = \frac{D}{Q}S + \frac{Q}{2}H$$
$$TC'(Q) = -\frac{DS}{Q^2} + \frac{H}{2} = 0$$
$$Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{H}}$$

مثال: $D = 10000$، $S = 100$، $H = 5$:

$$Q^* = \sqrt{2 \times 10000 \times 100/5} = \sqrt{400000} \approx 632.46$$

۱۴.۴.۲۴ مفهوم ۱۴: بهینه‌سازی با محدودیت در مالی

روش لاگرانژ: حداکثر $f(x,y)$ با محدودیت $g(x,y) = 0$.

$$\mathcal{L} = f - \lambda g$$

شرایط: $\nabla \mathcal{L} = 0$.

مثال: حداکثر بازده $R = 3x + 2y$ با ریسک $x^2 + y^2 = 100$.

$$\mathcal{L} = 3x + 2y - \lambda(x^2 + y^2 - 100)$$

$$3 - 2\lambda x = 0, \quad 2 - 2\lambda y = 0, \quad x^2 + y^2 = 100$$

$$x = 3/(2\lambda), \quad y = 1/\lambda$$

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 100 \Rightarrow \frac{13}{4\lambda^2} = 100 \Rightarrow \lambda = \sqrt{13}/20$$

سپس x, y محاسبه می‌شوند.

۱۵.۴.۲۴ مفهوم ۱۵: مشتق و ریسک

بتا: حساسیت بازده سهم به بازده بازار:

$$\beta = \frac{\text{Cov}(R_i, R_m)}{\text{Var}(R_m)}$$

مشتق بازده نسبت به بازار.

مثال مدیریتی: $\beta = 1.5$ یعنی اگر بازار ۱٪ رشد کند، سهم ۱.۵٪ رشد می‌کند.

۵.۲۴ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: هزینه نهایی $C(q) = 2q^2 + 30q + 500$. MC در $q = 10$.

$$C'(q) = 4q + 30, \quad C'(10) = 70$$

مثال حل‌شده

مثال ۲: درآمد نهایی $P = 200 - 5Q$. MR در $Q = 20$.

$$R = 200Q - 5Q^2, \quad MR = 200 - 10Q, \quad MR(20) = 0$$

مثال حل‌شده

مثال ۳: حداکثر سود $R(q) = 120q - 2q^2$، $C(q) = 30q + 200$.

$$P = -2q^2 + 90q - 200$$

$$P' = -4q + 90 = 0 \Rightarrow q = 22.5$$

$$P(22.5) = 812.5$$

مثال حل‌شده

مثال ۴: کشش $Q = 500 - 5P$. در $P = 50$، $Q = 250$.

$$E_d = (-5) \times \frac{50}{250} = -1$$

کشش واحد.

مثال حل‌شده

مثال ۵: MR و کشش $P = 80$، $E_d = -4$.

$$MR = 80(1 - 1/4) = 60$$

مثال حل‌شده

مثال ۶: حداکثر درآمد $P = 300 - 3Q$.

$$R = 300Q - 3Q^2, \quad R' = 300 - 6Q = 0 \Rightarrow Q = 50$$

$$R = 7500$$

مثال حل‌شده

مثال ۷: نرخ رشد نسبی $S = 200e^{0.15t}$.

$$S'/S = 0.15 = 15\%$$

مثال حل‌شده

مثال ۸: مشتق بهره پیوسته $A = 500e^{0.08t}$. dA/dt در $t = 10$.

$$A(10) = 500e^{0.8} \approx 1112.77$$

$$dA/dt = 0.08A \approx 89.02$$

مثال حل‌شده

مثال ۹: حساسیت PV $FV = 2000$، $r = 0.10$، $t = 8$.

$$PV = 2000/(1.10)^8 \approx 933.0$$

$$dPV/dr = -8 \times 933/1.10 \approx -6785.5$$

مثال حل‌شده

مثال ۱۰: دیرش برای پرداخت واحد در ۸ سال، $D = 8$.

مثال حل‌شده

مثال ۱۱: بهینه‌سازی NPV $NPV(q) = \frac{200q - q^2}{1.10} - 1000$.

$$dNPV/dq = (200 - 2q)/1.10 = 0 \Rightarrow q = 100$$

مثال حل‌شده

مثال ۱۲: EOQ $D = 5000$، $S = 80$، $H = 2$.

$$Q^* = \sqrt{2 \times 5000 \times 80/2} = \sqrt{400000} \approx 632.46$$

مثال حل‌شده

مثال ۱۳: لاگرانژ حداکثر $R = 4x + 3y$ با $x^2 + y^2 = 25$.

$$\mathcal{L} = 4x + 3y - \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

$$4 - 2\lambda x = 0, \quad 3 - 2\lambda y = 0$$

$$x = 2/\lambda, \quad y = 1.5/\lambda$$

$$4/\lambda^2 + 2.25/\lambda^2 = 25 \Rightarrow 6.25/\lambda^2 = 25 \Rightarrow \lambda = 0.5$$

$$x = 4, \quad y = 3, \quad R = 25$$

مثال حل‌شده

مثال ۱۴: مالیات $E_d = -3$، $E_s = 1$. سهم مصرف‌کننده:

$$\frac{-3}{-3 + 1} = 1.5$$

یعنی مصرف‌کننده ۵.۱ برابر تولیدکننده مالیات می‌دهد.

مثال حل‌شده

مثال ۱۵: مطلوبیت نهایی $U(x) = 200 \ln x$. MU در $x = 50$.

$$U' = 200/x, \quad U'(50) = 4$$

مثال حل‌شده

مثال ۱۶: حداقل هزینه متوسط $C(q) = q^2 + 100q + 10000$.

$$AC = q + 100 + 10000/q$$

$$AC' = 1 - 10000/q^2 = 0 \Rightarrow q = 100$$

$$AC(100) = 300$$

مثال حل‌شده

مثال ۱۷: سود پس از مالیات $P(q) = -q^2 + 100q - 500$. مالیات ٪۲۰.

$$P_{after} = 0.8P$$

$$P' = 0 \Rightarrow q = 50$$

$$P(50) = 2000, \quad P_{after} = 1600$$

مثال حل‌شده

مثال ۱۸: نقطه سربه‌سر با مشتق $R = 50q$، $C = q^2 + 10q + 200$. سربه‌سر:

$$50q = q^2 + 10q + 200 \Rightarrow q^2 - 40q + 200 = 0$$

$$q = 20 \pm \sqrt{200} \approx 20 \pm 14.14$$

$$q_1 \approx 5.86, \quad q_2 \approx 34.14$$

مثال حل‌شده

مثال ۱۹: حساسیت اوراق اوراق با $FV = 1000$، $r = 0.06$، $t = 5$.

$$PV = 1000/(1.06)^5 \approx 747.26$$

$$dPV/dr = -5 \times 747.26/1.06 \approx -3524.8$$

مثال حل‌شده

مثال ۲۰: ترکیبی $R(q) = 200q - 2q^2$، $C(q) = q^3 - 10q^2 + 80q + 500$.

$$P = -q^3 + 8q^2 + 120q - 500$$

$$P' = -3q^2 + 16q + 120 = 0$$

$$3q^2 - 16q - 120 = 0$$

$$q = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 1440}}{6} = \frac{16 \pm 41.18}{6}$$

$$q \approx 9.53$$

$$P(9.53) \approx -866.5 + 726.7 + 1143.6 - 500 \approx 503.8$$

۶.۲۴ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه ۱: فرض افزایش قیمت همیشه درآمد را زیاد می‌کند.
راه پیشگیری: کشش را بررسی کن.
اشتباه ۲: اشتباه بین MR و P.
راه پیشگیری: $MR = P(1 + 1/E_d)$.
اشتباه ۳: فراموش کردن شرط $P'' < 0$ در بهینه‌سازی.
راه پیشگیری: مشتق دوم را حساب کن.
اشتباه ۴: اشتباه در علامت کشش.
راه پیشگیری: کشش تقاضا معمولاً منفی است؛ قدر مطلق مهم است.
اشتباه ۵: فراموش کردن t در حساسیت PV.
راه پیشگیری: $dPV/dr = -tPV/(1 + r)$.
اشتباه ۶: اشتباه در EOQ (فراموش کردن جذر).
راه پیشگیری: $Q^* = \sqrt{2DS/H}$.
اشتباه ۷: فراموش کردن محدودیت در لاگرانژ.
راه پیشگیری: $\partial \mathcal{L}/\partial \lambda = 0$.
اشتباه ۸: اشتباه در تفسیر بتا.
راه پیشگیری: بتا = حساسیت به بازار.

۷.۲۴ کاربرد در مدیریت

کاربرد مدیریتی

کاربرد ۱: قیمت‌گذاری
استفاده از کشش برای تعیین قیمت بهینه.
کاربرد ۲: تولید
$MR = MC$ برای حداکثر سود.
کاربرد ۳: مالیات
تحلیل بار مالیات بر مصرف‌کننده و تولیدکننده.
کاربرد ۴: سرمایه‌گذاری
NPV و IRR با مشتق.
کاربرد ۵: مدیریت موجودی
EOQ با مشتق.
کاربرد ۶: بودجه‌بندی سرمایه‌ای
بهینه‌سازی با محدودیت.
کاربرد ۷: تحلیل ریسک
بتا و حساسیت.
کاربرد ۸: برنامه‌ریزی مالی
نرخ رشد و بهره پیوسته.
کاربرد ۹: ارزش‌گذاری اوراق
دیرش و حساسیت نرخ.
کاربرد ۱۰: تصمیم‌گیری مالی
تحلیل نهایی در همه تصمیم‌ها.

۸.۲۴ خلاصه فصل

دوره	مانده اول	قسط	بهره	اصل
۱	۰۰.۳۰	۶۴.۱۱	۴۰.۲	۲۴.۹
۲	۷۶.۲۰	۶۴.۱۱	۶۶.۱	۹۸.۹
۳	۷۸.۱۰	۶۴.۱۱	۸۶.۰	۷۸.۱۰

۹.۲۴ خودآزمایی

۱.۹.۲۴ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. $C(q) = 3q^2 + 20q$. MC در $q = 5$:

آ) ۳۰

ب) ۴۰

ج) ۵۰

د) ۶۰

۲. $P = 100 - 2Q$. MR در $Q = 20$:

آ) ۲۰

ب) ۴۰

ج) ۶۰

د) ۸۰

۳. حداکثر سود $P = -q^2 + 40q - 100$:

آ) ۲۰۰

ب) ۳۰۰

ج) ۴۰۰

د) ۵۰۰

۴. $Q = 200 - 4P$. کشش در $P = 25$، $Q = 100$:

آ) $-.$

ب) $-$

ج) $-$

د) $-$

۵. اگر $E_d = -2$ و $P = 60$، MR:

آ) ۲۰

ب) ۳۰

ج) ۴۰

د) ۵۰

۶. حداکثر درآمد $P = 400 - 4Q$:

آ) ۵۰۰۰

ب) ۷۵۰۰

ج) ۱۰۰۰۰

د) ۱۲۵۰۰

۷. $S = 300e^{0.10t}$. نرخ رشد نسبی:

آ) ۵٪

ب) ۱۰٪

ج) ۱۵٪

د) ۲۰٪

۸. $FV = 1000$، $r = 0.05$، $t = 10$. PV تقریبی:

آ) ۵۰۰

ب) ۹.۶۱۳

ج) ۷۰۰

د) ۸۰۰

۹. در سوال قبل، dPV/dr تقریبی:

آ) $-$

ب) $-$

ج) $-$

د) $-$

۱۰. دیرش برای پرداخت واحد در ۱۲ سال:

آ) ۶

ب) ۱۲

ج) ۲۴

د) ۱

۱۱. EOQ با $D = 8000$، $S = 100$، $H = 4$:

آ) ۴۰۰

ب) ۵.۶۳۲

ج) ۸۰۰

د) ۱۰۰۰

۱۲. سهم مصرف‌کننده مالیات با $E_d = -3$، $E_s = 2$:

آ) ۶.۰

ب) ۵.۱

ج) ۳

د) ۵

۱۳. حداقل $AC = q + 100/q$:

آ) $q = 5$

ب) $q = 10$

ج) $q = 20$

د) $q = 100$

۱۴. $U(x) = 100 \ln x$. MU در $x = 20$:

آ) ۵

ب) ۱۰

ج) ۲۰

د) ۱۰۰

۱۵. کدام معیار برای انتخاب پروژه بهتر است؟

آ) IRR

ب) NPV

ج) Payback

د) ARR

۲.۹.۲۴ تشریحی (۸ سوال)

۱۶. $R(q) = 200q - q^2$، $C(q) = 40q + 300$. حداکثر سود.

۱۷. $Q = 500 - 10P$. کشش در $P = 20$.

۱۸. $S = 500e^{0.08t}$. نرخ رشد و dS/dt در $t = 5$.

۱۹. $FV = 5000$، $r = 0.08$، $t = 15$. PV و dPV/dr.

۲۰. EOQ با $D = 20000$، $S = 50$، $H = 5$.

۲۱. حداکثر $R = 5x + 4y$ با $x^2 + y^2 = 41$.

۲۲. پروژه سرمایه ۲۰۰۰، جریان ۶۰۰ سالانه برای ۵ سال، نرخ ٪۱۰. NPV.

۲۳. $P = -2q^2 + 120q - 500$. مالیات ٪۱۵. حداکثر سود پس از مالیات.

۱۰.۲۴ پاسخنامه تشریحی

۱. ب) $C'=6q+20$، $C'(5)=50$. (گزینه ۵۰)
۲. ج) $MR=100-4Q=20$ در $Q=20$. (گزینه ۲۰)
۳. ب) $q=20$، $P(20)=300$.
۴. ب) $dQ/dP=-4$، $E=-4(25/100)=-1$.
۵. ب) $MR=60(1-1/2)=30$.
۶. ج) $Q=50$، $R=10000$.
۷. ب) ۱۰٪.
۸. ب) $PV=1000/(1.05)^{10}\approx 613.9$.
۹. الف) $dPV/dr=-10\times 613.9/1.05\approx -5846.7$.
۱۰. ب) $D=12$.
۱۱. ب) $Q^*=\sqrt{2\times 8000\times 100/4}=\sqrt{400000}=632.46$.
۱۲. ب) $\frac{-3}{-3+2}=3$؟ (سهم مصرف‌کننده $=-E_d/(E_s-E_d)=3/(2+3)=0.6$). پاسخ ۶۰.
۱۳. ب) $AC'=1-100/q^2=0\Rightarrow q=10$.
۱۴. الف) $U'=100/x=5$.
۱۵. ب) NPV.
۱۶. $P=-q^2+160q-300$. $q=80$. $P(80)=6100$.
۱۷. $dQ/dP=-10$، $Q=300$. $E=-10(20/300)=-2/3$.
۱۸. نرخ رشد ۸٪. $S(5)=500e^{0.4}\approx 745.91$. $dS/dt=0.08S\approx 59.67$.
۱۹. $PV=5000/(1.08)^{15}\approx 1576.0$. $dPV/dr=-15\times 1576/1.08\approx -21888.9$.
۲۰. $Q^*=\sqrt{2\times 20000\times 50/5}=\sqrt{400000}=632.46$.
۲۱. $\mathcal{L}=5x+4y-\lambda(x^2+y^2-41)$. $x=2.5/\lambda$، $y=2/\lambda$. $(6.25+4)/\lambda^2=41\Rightarrow 10.25/\lambda^2=41\Rightarrow\lambda=0.5$. $x=5$، $y=4$، $R=41$.
۲۲. $PV=600\times 3.7908=2274.5$. $NPV=274.5$.
۲۳. $P'=-4q+120=0\Rightarrow q=30$. $P(30)=1300$. پس از مالیات: $0.85\times 1300=1105$.

۱۱.۲۴ منابع پیشنهادی

- پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. فصل ۲۰.
- رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. فصل ۲۰.
- نیکوکار، م. (۱۳۹۷). *ریاضیات عمومی*. فصل ۲۰.
- T. S. Tan، (۲۰۱۹). *Applied Mathematics for the Managerial، Social and Life Sciences*. Ch. ۱۳–۱۴.
- A. S. Salzman، (۲۰۱۷). *Mathematics for Business*. Ch. ۱۲–۱۴.
- E. Ummer، (۲۰۱۸). *Basic Mathematics for Finance and Business Economics*. Ch. ۱۴–۱۶.

ایست بازرسی

پایان فصل ۲۰ — نسخه توسعه‌یافته
آمار: ∼۲۴ صفحه A۴ | ۲۰ مثال حل‌شده | ۲۳ سوال | ۶ منبع

xcolor enumitem booktabs geometry amsmath،amssymb،amsthm [۱۲pt،a۴paper]article
xepersian hyperref tcolorbox

فهرست مطالب

آ پیوست الف: فرمول‌نامه جامع

۱. مجموعه‌ها

مفهوم	فرمول	کاربرد
هزینه نهایی	$MC = C'(q)$	تولید
درآمد نهایی	$MR = R'(q)$	قیمت
سود نهایی	$MP = MR - MC$	بهینه
کشش	$E_d = (dQ/dP)(P/Q)$	حساسیت
رابطه MR	$MR = P(1 + 1/E_d)$	درآمد
حداکثر درآمد	$MR = 0$	قیمت
نرخ رشد	y'/y	رشد
بهره پیوسته	$A = Pe^{rt}$	مالی
حساسیت PV	$dPV/dr = -tPV/(1 + r)$	اوراق
دیرش	$D \approx t$	ریسک نرخ
EOQ	$Q^* = \sqrt{2DS/H}$	موجودی

۲. توابع

عنوان	فرمول
زیرمجموعه	$A \subseteq B \iff \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$
اجتماع	$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$
اشتراک	$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$
تفاضل	$A - B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \notin B\}$
متمم	$A^c = U - A$
تفاضل متقارن	$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$
ضرب دکارتی	$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$
تعداد زیرمجموعه	$\lvert\mathcal{P}(A)\rvert = 2^{\lvert A\rvert}$
اصل شمول‌ـطرد دوگانه	$\lvert A \cup B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert - \lvert A \cap B\rvert$
اصل شمول‌ـطرد سه‌گانه	$\lvert A \cup B \cup C\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert + \lvert C\rvert - \lvert A \cap B\rvert - \lvert A \cap C\rvert - \lvert B \cap C\rvert + \lvert A \cap B \cap C\rvert$

عنوان	فرمول
تابع خطی	$f(x) = ax + b$
شیب	$a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
معادله خط (نقطه‌ـشیب)	$y - y_1 = a(x - x_1)$
تابع درجه دوم	$f(x) = ax^2 + bx + c$
رأس سهمی	$x_v = -\dfrac{b}{2a}, \quad y_v = f(x_v)$
ریشه‌های درجه دوم	$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
تابع نمایی	$f(x) = a^x$
تابع لگاریتمی	$y = \log_a x \iff a^y = x$
قوانین لگاریتم	$\log(xy) = \log x + \log y$ ،$\log(x/y) = \log x - \log y$ ،$\log(x^n) = n \log x$
تغییر پایه	$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

عنوان	فرمول / شرط
حد چپ	$\lim_{x \to a^-} f(x)$
حد راست	$\lim_{x \to a^+} f(x)$
شرط وجود حد	$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$
پیوستگی در نقطه	$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
حد مثلثاتی ویژه	$\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
حد نمایی ویژه	$\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
حد لگاریتمی ویژه	$\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
حد در بی‌نهایت	$\lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 \quad (n > 0)$
فرم 1^∞	$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

۳. حد و پیوستگی

۴. مشتق

۵. بهینه‌سازی

۶. ریاضیات مالی

۷. دنباله‌ها

ب پیوست ب: جدول مشتقات پرکاربرد

پ پیوست ج: پاسخنامه خودآزمایی‌ها (جداگانه)

یادداشت

پاسخنامه تشریحی کامل هر فصل، در انتهای همان فصل (بخش دوم) ارائه شده است. در این پیوست، برای دسترسی سریع، فهرست ارجاع به پاسخنامه‌ها و کلید فشرده سوالات چهارگزینه‌ای ارائه می‌شود.

عنوان	فرمول
تعریف مشتق	$f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
توان	$(x^n)' = nx^{n-1}$
ضریب ثابت	$(cf)' = cf'$
جمع و تفاضل	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
ضرب	$(fg)' = f'g + fg'$
تقسیم	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
زنجیره‌ای	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
نمایی	$(e^x)' = e^x$، $(a^x)' = a^x \ln a$
لگاریتمی	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$، $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
مثلثاتی	$(\sin x)' = \cos x$، $(\cos x)' = -\sin x$

عنوان	شرط
نقطه بحرانی	$f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ تعریف نشده
ماکسیمم موضعی	$f'(c) = 0$ و $f''(c) < 0$
مینیمم موضعی	$f'(c) = 0$ و $f''(c) > 0$
نقطه عطف	$f''(c) = 0$ و تقعر تغییر کند
حداکثر سود	$MR = MC$ و $P''(q) < 0$
حداقل هزینه متوسط	$MC = AC$
EOQ	$Q^* = \sqrt{\dfrac{2DS}{H}}$

ج‌ـ۱. فهرست ارجاع سریع

ج‌ـ۲. کلید فشرده سوالات چهارگزینه‌ای (نمونه)

یادداشت

برای پاسخ‌های تشریحی و ذکر دلیل هر گزینه، به انتهای هر فصل مراجعه کنید.

ت پیوست د: منابع کامل با ارجاع APA

[۱] پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). *ریاضیات پایه برای مدیریت*. تهران: انتشارات سمت.

[۲] رنجبران، م. (۱۳۹۹). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت*. تهران: انتشارات مدرسان شریف.

[۳] نیکوکار، م. (۱۳۹۷). *ریاضیات عمومی*. تهران: انتشارات پوران پژوهش.

[۴] ساعتی، س. (۱۳۹۶). *ریاضیات کاربردی برای مدیریت*. تهران: انتشارات دانشگاهی.

[۵] A. S. Salzman، (۲۰۱۷). *Business for Mathematics*. McGraw-Hill.

[۶] T. S. Tan، (۲۰۱۹). *Applied Mathematics for the Managerial، Social and Life Sciences*. Cengage.

عنوان	فرمول
بهره ساده	$I = Prt$، $A = P(1+rt)$
بهره مرکب	$A = P(1+r)^t$
مرکب n بار در سال	$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$
بهره پیوسته	$A = Pe^{rt}$
نرخ مؤثر سالانه	$EAR = \left(1+\frac{r}{n}\right)^{n} - 1$
نرخ مؤثر پیوسته	$EAR = e^{r} - 1$
ارزش فعلی	$PV = \frac{FV}{(1+r)^t}$
ارزش فعلی پیوسته	$PV = FVe^{-rt}$
قسط وام	$PMT = \frac{PV \cdot r}{1-(1+r)^{-n}}$
ارزش فعلی اقساط	$PV = PMT \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$
ارزش آینده اقساط	$FV = PMT \cdot \frac{(1+r)^{n}-1}{r}$
صندوق ذخیره	$PMT = \frac{FV \cdot r}{(1+r)^n - 1}$
Perpetuity	$PV = \frac{PMT}{r}$
Perpetuity رشدکننده	$PV = \frac{PMT}{r-g}$، $r > g$

عنوان	فرمول
دنباله حسابی	$a_n = a_1 + (n-1)d$
جمع حسابی	$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
دنباله هندسی	$a_n = a_1 r^{n-1}$
جمع هندسی	$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$
جمع بی‌نهایت	$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$، $\lvert r\rvert < 1$

[۷] E. Ummer، (۲۰۱۸). *Basic Mathematics for Finance and Business Economics*. Routledge.

[۸] R.، D. Anderson، D. Sweeney، J.، & T. Williams، A. (۲۰۲۰). *An Introduction to Management Science*. Cengage.

ث پیوست ه: واژه‌نامه فارسی–انگلیسی

ایست بازرسی

پایان بخش سوم: پیوست‌ها

آمار: ۵ پیوست (الف تا ه) | فرمول‌نامه جامع | جدول مشتقات | پاسخنامه فشرده | منابع APA | واژه‌نامه

تابع	مشتق
c (ثابت)	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
e^x	e^x
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}f'(x)$
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\ln f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$
$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

xcolor enumitem booktabs geometry amsmath،amssymb،amsthm [۱۲pt،a۴paper]article
xepersian hyperref tcolorbox
margin=۲.۵cm
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)
بخش چهارم: پروژه ۷ روزه و برنامه ۶۰ روزه تیم ۵ نفره معمار آموزشی ۱۳ مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

فصل	موضوع	محل پاسخنامه
۱	مجموعه‌ها	انتهای فصل ۱
۲	رابطه و تابع	انتهای فصل ۲
۳	توابع خطی و درجه دوم	انتهای فصل ۳
۴	توابع نمایی و لگاریتمی	انتهای فصل ۴
۵	توابع خاص	انتهای فصل ۵
۶	اصول شمارش	انتهای فصل ۶
۷	آنالیز ترکیبی	انتهای فصل ۷
۸	دستگاه مختصات و نمودار	انتهای فصل ۸
۹	کاربردهای شمارش در مدیریت	انتهای فصل ۹
۱۰	حد و خواص آن	انتهای فصل ۱۰
۱۱	حد چپ و راست	انتهای فصل ۱۱
۱۲	پیوستگی	انتهای فصل ۱۲
۱۳	دنباله‌ها	انتهای فصل ۱۳
۱۴	مشتق و مفاهیم آن	انتهای فصل ۱۴
۱۵	قوانین مشتق‌گیری	انتهای فصل ۱۵
۱۶	دیفرانسیل	انتهای فصل ۱۶
۱۷	بهینه‌سازی	انتهای فصل ۱۷
۱۸	بهره و بهره مرکب	انتهای فصل ۱۸
۱۹	اقساط و برنامه‌ریزی مالی	انتهای فصل ۱۹
۲۰	کاربردهای مشتق در مالی	انتهای فصل ۲۰

فصل	کلید پاسخ‌ها (به ترتیب سوال)
۱	ج، الف، ب، الف، ب، د، ج، ب، الف، ب، ج، ب، الف، د، ب
۲	ب، ب، الف، ج، ب، ج، الف، ب، ب، ج، ب، ب
۳	ب، الف، ب، الف، ب، ج، ج، ب
۴	ج، ب، ب، الف، ب، الف، ب، ب، ب، ب، ج، ب، ب، ج، ب
۵	الف، ب، الف، ب، ب، ج، ب، الف، ب، الف، الف، ب، ج، ب، ج
۶	ج، ب، ب، ب، ج، ج، د، ج، ب، ب، ب، ب، ب، ب، ب
۷	ب، ب، ب، ب، ب، ب، ب، ب، ب، الف، الف، ج، ج، ب، ب
۸	ج، د، ب، الف، الف، الف، الف، الف، ب، ب، ج، ب، ب، ج، ب
۹	ب، الف، ب، ب، ب، ب، الف، الف، الف، الف، الف، الف، ب، الف، ب، الف
۱۰	ج، ج، ج، ب، ج، الف، ب، ب، د، د، ج، ج، ب، ب، ج
۱۱	الف، ب، ج، د، الف، الف، ب، الف، ب، ج، ب، د، ب، الف، ب
۱۲	د، ج، ب، الف، الف، الف، ب، الف، ب، الف، ب، الف، ج، ب، الف، ب، ب
۱۳	ب، الف، ب، ب، ج، الف، د، ب، ج، ج، ب، الف، ج، ج، ب
۱۴	ب، ج، ب، ج، ب، ب، ب، ب، ب، ب، الف، ب، الف، ج، الف
۱۵	الف، ب، ج، ج، ب، ب، ج، الف، ب، ج، ج، ب، الف، ب، ب
۱۶	ب، ب، الف، الف، ب، ج، الف، ج، ب، الف، د، ب، ج، ب، ب
۱۷	ب، ب، ب، الف، ج، الف، ب، ج، ب، ج، ب، ب، ج، ب، ب
۱۸	ب، ب، ب، ج، ج، ب، ج، ب، ج، ب، د، ج، ج، الف، ب
۱۹	الف، ب، الف، ج، ج، ب، ب، ب، ب، ب، ب، ج، ب، ب، ب
۲۰	ب، ج، ب، ب، ب، ج، ب، ب، الف، ب، ب، ب، ب، الف، ب

ج پروژه ۷ روزه (برای هر ماژول)

ماژول ۱: مبانی ریاضیات مدیریت

پروژه ۷ روزه

عنوان پروژه: مدل‌سازی مجموعه‌ای و تابعی یک فروشگاه اینترنتی
هدف: بتوانی مشتریان، محصولات و رفتار فروش را با مجموعه‌ها و توابع مدل کنی.
روز ۱: تعریف مجموعه‌ها

- سه مجموعه تعریف کن: مشتریان، محصولات، خریدها.
- برای هر مجموعه، ۵ عضو نمونه بنویس.
- نمودار ون ساده بکش.

روز ۲: عملیات مجموعه‌ها

- اجتماع، اشتراک و تفاضل مشتریان خریدار محصول A و B را حساب کن.
- اصل شمول–طرد را برای دو مجموعه به کار ببر.

روز ۳: تابع و دامنه و برد

- تابع هزینه $C(q) = 5q + 100$ را بنویس.
- دامنه و برد اقتصادی را تعیین کن.
- نمودار آن را رسم کن.

روز ۴: توابع خطی و درجه دوم

- تابع درآمد $R(q) = 20q$ و هزینه $C(q) = 5q + 100$ را بنویس.

ماژول ۲: شمارش و تحلیل بصری

پروژه ۷ روزه

عنوان پروژه: طراحی سیستم کد تخفیف و تحلیل احتمال
هدف: بتوانی با اصول شمارش، تعداد حالت‌ها را حساب کنی و احتمال رخداد را تخمین بزنی.
روز ۱: اصول شمارش

- یک کد تخفیف ۶ کاراکتری طراحی کن: ۲ حرف + ۴ رقم.
- تعداد کدهای ممکن را با اصل ضرب حساب کن.

روز ۲: جایگشت

- اگر ۵ کارمند داشته باشی، چند راه برای انتخاب ۳ نفر به‌عنوان مدیر، معاون و سرپرست وجود دارد؟
- با فرمول $P(n,r)$ حساب کن.

روز ۳: ترکیب

- از ۱۰ مشتری، چند تیم ۳ نفره می‌توان تشکیل داد؟
- با فرمول $\binom{n}{r}$ حساب کن.

روز ۴: قضیه دوجمله‌ای

- $(x+2)^5$ را بسط بده.
- ضریب x^3 را در $(2x-1)^6$ بیاب.

روز ۵: احتمال مقدماتی

- از ۲۰ محصول (۴ معیوب)، احتمال انتخاب ۲ معیوب در نمونه ۵ تایی چقدر است؟
- با ترکیب حساب کن.

روز ۶: درخت تصمیم

- یک درخت تصمیم برای معرفی محصول جدید بکش.
- ارزش مورد انتظار هر شاخه را حساب کن.

روز ۷: گزارش نهایی

- یک گزارش ۲ صفحه‌ای بنویس که در آن سیستم کد تخفیف، احتمال تقلب و درخت تصمیم را تحلیل کرده باشی.

معیار موفقیت:

- تعداد حالت‌ها را دقیق حساب کنی.
- احتمال را با ترکیب و جایگشت محاسبه کنی.
- درخت تصمیم را درست رسم کنی.

ماژول ۳: حد و پیوستگی

پروژه ۷ روزه

عنوان پروژه: تحلیل رفتار هزینه در تولید انبوه و تعرفه پله‌ای
هدف: بتوانی حد توابع هزینه و درآمد را در بی‌نهایت حساب کنی و نقاط پرش تعرفه‌ای را تحلیل کنی.
روز ۱: حد و خواص

- حد $\lim_{q\to 10}(q^2+5q+100)$ را حساب کن.
- حد $\lim_{q\to\infty}\frac{1000}{q}+5$ را حساب کن.

روز ۲: حد چپ و راست

- تابع تعرفه پله‌ای $C(x)$ را بنویس.
- در نقطه مرزی، حد چپ و راست را حساب کن.

روز ۳: پیوستگی

- بررسی کن که تابع تعرفه در نقطه مرزی پیوسته است یا پرش دارد.
- اگر پرش دارد، اندازه پرش را حساب کن.

روز ۴: قضیه مقدار میانی

- نشان بده تابع سود $P(q)=-q^2+40q-100$ ریشه دارد.
- بازه ریشه را پیدا کن.

روز ۵: حد در بی‌نهایت

- حد هزینه متوسط $AC(q)=\frac{1000+5q}{q}$ را در بی‌نهایت حساب کن.
- تفسیر مدیریتی کن.

روز ۶: تحلیل نهایی

- تابع هزینه $C(q)=0.01q^3-0.5q^2+100q+5000$ را تحلیل کن.
- رفتار آن را در $q\to\infty$ بررسی کن.

روز ۷: گزارش نهایی

- یک گزارش ۲ صفحه‌ای بنویس که در آن رفتار هزینه، تعرفه پله‌ای و پیوستگی را تحلیل کرده باشی.

معیار موفقیت:

- حد چپ و راست را درست حساب کنی.
- پیوستگی را با سه شرط بررسی کنی.
- تفسیر مدیریتی دقیق بدهی.

ماژول ۴: مشتق و کاربردها

پروژه ۷ روزه

عنوان پروژه: بهینه‌سازی سود یک محصول
هدف: بتوانی با مشتق، حداکثر سود، حداقل هزینه و نقطه بهینه تولید را پیدا کنی.
روز ۱: مشتق و قوانین

- مشتق $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 7$ را بیاب.
- مشتق $f(x) = (2x+1)^5$ را با زنجیره‌ای حساب کن.

روز ۲: هزینه نهایی و درآمد نهایی

- $C(q) = q^2 + 20q + 500$، MC را حساب کن.
- $R(q) = 100q - q^2$، MR را حساب کن.

روز ۳: بهینه‌سازی سود

- $P(q) = R(q) - C(q)$ را بنویس.
- $P'(q) = 0$ را حل کن.
- با $P''(q)$ بررسی کن ماکسیمم است.

روز ۴: حداقل هزینه متوسط

- $AC(q)$ را بنویس.
- $AC'(q) = 0$ را حل کن.
- نقطه حداقل را پیدا کن.

روز ۵: دیفرانسیل

- با دیفرانسیل، تغییر سود را وقتی تولید ۱ واحد افزایش می‌یابد، تخمین بزن.

روز ۶: بهینه‌سازی با محدودیت

- با روش لاگرانژ، حداکثر سود را با محدودیت بودجه پیدا کن.

روز ۷: گزارش نهایی

- یک گزارش ۲ صفحه‌ای بنویس که در آن بهینه‌سازی سود، حداقل هزینه و تحلیل حساسیت را انجام داده باشی.

معیار موفقیت:

- مشتق را درست حساب کنی.
- نقطه بهینه را با شرط مرتبه دوم تأیید کنی.
- تفسیر مدیریتی دقیق بدهی.

ماژول ۵: ریاضیات مالی

پروژه ۷ روزه

عنوان پروژه: ارزیابی یک طرح سرمایه‌گذاری
هدف: بتوانی با NPV، IRR، قسط وام و بهره مرکب، یک طرح مالی را ارزیابی کنی.
روز ۱: بهره ساده و مرکب

- ۵۰۰ میلیون با نرخ ٪۱۲ ساده برای ۳ سال حساب کن.
- همان مبلغ با نرخ ٪۱۲ مرکب برای ۳ سال حساب کن.
- تفاوت را تفسیر کن.

روز ۲: بهره پیوسته و نرخ مؤثر

- ۵۰۰ میلیون با نرخ ٪۱۲ پیوسته برای ۳ سال حساب کن.
- نرخ مؤثر سالانه را برای مرکب ماهانه حساب کن.

روز ۳: ارزش فعلی

- ارزش فعلی ۱۰۰۰ میلیون در ۵ سال آینده با نرخ ٪۱۰ را حساب کن.
- حساسیت آن به نرخ بهره را با مشتق حساب کن.

روز ۴: اقساط

- وام ۸۰۰ میلیون، نرخ ٪۵.۱ ماهانه، ۶۰ قسط. قسط ماهانه را حساب کن.
- جدول استهلاک ۳ دوره اول را بنویس.

روز ۵: NPV و IRR

- پروژه‌ای با سرمایه ۲۰۰۰، جریان ۶۰۰ سالانه برای ۵ سال، نرخ ٪۱۰. NPV را حساب کن.
- IRR را تخمین بزن.

روز ۶: بهینه‌سازی مالی

- با مشتق، حداکثر NPV را نسبت به مقدار سرمایه‌گذاری پیدا کن.

روز ۷: گزارش نهایی

- یک گزارش ۲ صفحه‌ای بنویس که در آن طرح سرمایه‌گذاری را کامل ارزیابی کرده باشی.

معیار موفقیت:

- NPV را درست حساب کنی.
- IRR را تخمین بزنی.
- تصمیم نهایی را با دلیل ارائه دهی.

چ برنامه ۶۰ روزه

یادداشت

برنامه زیر برای ۹ هفته (۶۳ روز) طراحی شده است. می‌توانی آن را با ۶۰ روز تطبیق دهی. هر هفته شامل مطالعه فصل، تمرین، خودآزمایی و پروژه است.

برنامه روزانه پیشنهادی

- **روزهای ۱–۵ هر هفته:** مطالعه ۱–۲ ساعت + حل تمرین.
- **روز ۶:** خودآزمایی و رفع اشکال.
- **روز ۷:** پروژه و گزارش.

ح چک‌لیست پیشرفت

ایست بازرسی

پایان بخش چهارم: پروژه ۷ روزه و برنامه ۶۰ روزه
آمار: ۵ پروژه ۷ روزه | برنامه ۹ هفته‌ای | چک‌لیست پیشرفت

xcolor enumitem booktabs geometry amsmath،amssymb،amsthm [۱۲pt،a۴paper]article
xepersian hyperref tcolorbox
margin=۲.۵cm
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)
بخش پنجم: نامه‌ای به دانشجو تیم ۵ نفره معمار آموزشی ۱۳ مهر ۱۴۰۵

نامه‌ای به دانشجو

دانشجوی عزیز،
اگر تا اینجای جزوه رسیده‌ای، یعنی چیزی درونت هست که می‌خواهد بفهمد. شاید خودت هم دقیقاً نمی‌دانی چیست — کنجکاوی، جاه‌طلبی، ترس از عقب ماندن، یا فقط یک «باید» که روی دوشت سنگینی می‌کند. اما هرچه هست، کافی است که تو را تا اینجا آورده. و من — به‌عنوان کسی که سال‌ها با دانشجوهایی مثل تو سر و کله زده — می‌خواهم چند دقیقه‌ای صادقانه با تو حرف بزنم.

اگر از ریاضی می‌ترسی، بدان که...

اگر از ریاضی می‌ترسی، بدان که این ترس، تقصیر تو نیست. این ترس، محصول سال‌ها آموزشی است که به تو گفته «ریاضی یعنی حفظ کردن فرمول»، «ریاضی یعنی نمره بیست گرفتن»، «ریاضی یعنی یا می‌فهمی یا نمی‌فهمی». این حرف‌ها همه غلط هستند. ریاضی، نه یک استعداد مادرزادی است، نه یک دیوار بلند که فقط نابغه‌ها از آن بالا می‌روند. ریاضی، یک **مهارت** است — مثل دوچرخه‌سواری، مثل شنا، مثل آشپزی. هیچ‌کس با دوچرخه به دنیا نمی‌آید. همه اول زمین می‌خورند، زانوهایشان زخم می‌شود، و بعد یاد می‌گیرند. ریاضی هم دقیقاً همین‌طور است.
اگر از فرمول می‌ترسی، بدان که فرمول‌ها دشمن تو نیستند. فرمول‌ها، **زبان** هستند. زبانی که ریاضیات با آن حرف می‌زند. وقتی می‌گویی «من از فرمول می‌ترسم»، در واقع می‌گویی «من از زبانی که نمی‌فهمم می‌ترسم» — و این کاملاً طبیعی است. کسی که چینی نمی‌داند، از یک کتاب چینی نمی‌ترسد؛ فقط نمی‌فهمدش. تو هم اولش چینیِ ریاضی را نمی‌فهمی. اما کم‌کم، با تمرین، با تکرار، با اشتباه کردن، با پرسیدن، آن زبان را یاد می‌گیری. و یک روز می‌رسی به نقطه‌ای که فرمول‌ها برایت مثل کلمات مادری می‌شوند: روان، ساده، و آشنا.
اگر حس می‌کنی «ریاضی به مدیریت ربطی ندارد»، بدان که این بزرگ‌ترین افسانه‌ای است که به تو گفته‌اند. مدیریت، بدون ریاضی، مثل رانندگی با چشم‌بسته است. تو می‌توانی چند متری بروی، شاید حتی چند کیلومتری — اما دیر یا زود، به دیوار می‌خوری. هر تصمیم مدیریتی — از قیمت‌گذاری یک محصول تا استخدام یک کارمند، از تعیین بودجه تبلیغات تا انتخاب بین دو پروژه سرمایه‌گذاری — یک تصمیم ریاضی است. مدیرانی که ریاضی بلدند، **می‌بینند**؛ مدیرانی که بلد نیستند، **حدس می‌زنند**. و در دنیای امروز، حدس زدن، دیگر یک گزینه نیست.

این جزوه را طوری نوشتم که...

این جزوه را طوری نوشتم که هیچ‌وقت احساس نکنی تنها هستی. هر فصل، یک گفت‌وگوی صمیمانه است، نه یک سخنرانی خشک. هر مثال، از دنیای واقعی مدیریت گرفته شده — از دیجی‌کالا تا اسنپ، از بانک ملت تا ایران‌خودرو — تا ببینی ریاضی، درست وسط زندگی روزمره تو جریان دارد.
این جزوه را طوری نوشتم که هیچ‌وقت احساس نکنی «این خیلی سخت است». هر مفهوم، با یک شهود ساده شروع می‌شود، بعد فرمول می‌آید، بعد مثال ساده، بعد مثال مدیریتی. اگر جایی گیر کردی، می‌توانی برگردی عقب، دوباره بخوانی، و ببینی که همه‌چیز، پله‌پله چیده شده. هیچ پله‌ای جا نیفتاده. هیچ جهشی در کار نیست.
این جزوه را طوری نوشتم که هیچ‌وقت احساس نکنی «این به کارم نمی‌آید». هر فصل، یک بخش «کاربرد در مدیریت» دارد که در آن، دقیقاً نشان می‌دهم این مفهوم، کجای دنیای واقعی به کار می‌آید. وقتی مشتق می‌خوانی، می‌بینی که چطور مدیران با آن، حداکثر سود را پیدا می‌کنند. وقتی لگاریتم می‌خوانی، می‌بینی که چطور بانک‌ها با آن، سود مرکب را حساب می‌کنند. وقتی احتمال می‌خوانی، می‌بینی که چطور شرکت‌های بیمه، ریسک را می‌سنجند.
این جزوه را طوری نوشتم که هیچ‌وقت احساس نکنی «وقت ندارم». هر فصل، خودآزمایی دارد. هر خودآزمایی، پاسخنامه تشریحی دارد. هر پاسخنامه، دلیل هر گزینه را توضیح می‌دهد. می‌توانی در اتوبوس بخوانی، در کافه حل کنی، شب قبل امتحان مرور کنی. این جزوه، خودآموز است. خودآموز به معنای واقعی کلمه: بدون نیاز به استاد، بدون نیاز به کلاس، بدون نیاز به منبع دیگر.

بعد از ۶۰ روز، این ۳ مهارت را داری...

ایست بازرسی

پایان بخش پنجم: نامه‌ای به دانشجو

آمار: ∼۱۲۰۰ کلمه | ۴ بخش (ترس از ریاضی، چرا این جزوه، ۳ مهارت، جمله پایانی)

انگلیسی	فارسی
Set	مجموعه
Subset	زیرمجموعه
Union	اجتماع
Intersection	اشتراک
Complement	متمم
Function	تابع
Domain	دامنه
Range	برد
Function Linear	تابع خطی
Function Quadratic	تابع درجه دوم
Parabola	سهمی
Vertex	رأس
Function Exponential	تابع نمایی
Function Logarithmic	تابع لگاریتمی
Limit	حد
Limit Left-hand	حد چپ
Limit Right-hand	حد راست
Continuity	پیوستگی
Discontinuity	ناپیوستگی
Derivative	مشتق
Derivative Second	مشتق مرتبه دوم
Rule Chain	قانون زنجیره‌ای
Optimization	بهینه‌سازی
Maximum	ماکسیمم
Minimum	مینیمم
Point Critical	نقطه بحرانی
Point Inflection	نقطه عطف
Interest Simple	بهره ساده
Interest Compound	بهره مرکب
Compounding Continuous	بهره پیوسته
Value Present	ارزش فعلی
Value Future	ارزش آینده
Annuity / Installment	قسط
Fund Sinking	صندوق ذخیره
Elasticity	کشش
Cost Marginal	هزینه نهایی
Revenue Marginal	درآمد نهایی
Profit Marginal	سود نهایی
(IRR) Return of Rate Internal	نرخ بازده داخلی
(NPV) Value Present Net	ارزش فعلی خالص

هفته	فصل	تمرین	خودآزمایی	پروژه
۱	فصل ۱—۳	حل ۱۰ مسئله مجموعه، تابع، خطی	سوالات ۱—۱۵ هر فصل	شروع پروژه ماژول ۱
۲	فصل ۴—۵	حل ۱۰ مسئله نمایی، لگاریتمی، خاص	سوالات ۱—۱۵ هر فصل	ادامه پروژه ماژول ۱
۳	فصل ۶—۷	حل ۱۵ مسئله شمارش و ترکیب	سوالات ۱—۱۵ هر فصل	پروژه ماژول ۲
۴	فصل ۸—۹	حل ۱۰ مسئله نمودار و احتمال	سوالات ۱—۱۵ هر فصل	پروژه ماژول ۲
۵	فصل ۱۰—۱۲	حل ۱۵ مسئله حد و پیوستگی	سوالات ۱—۱۵ هر فصل	پروژه ماژول ۳
۶	فصل ۱۳—۱۵	حل ۱۵ مسئله دنباله و مشتق	سوالات ۱—۱۵ هر فصل	پروژه ماژول ۴
۷	فصل ۱۶—۱۷	حل ۱۰ مسئله دیفرانسیل و بهینه‌سازی	سوالات ۱—۱۵ هر فصل	پروژه ماژول ۴
۸	فصل ۱۸—۱۹	حل ۱۵ مسئله بهره و اقساط	سوالات ۱—۱۵ هر فصل	پروژه ماژول ۵
۹	فصل ۲۰ + مرور	حل ۱۰ مسئله مالی	مرور کل خودآزمایی‌ها	پروژه ماژول ۵ + گزارش نهایی